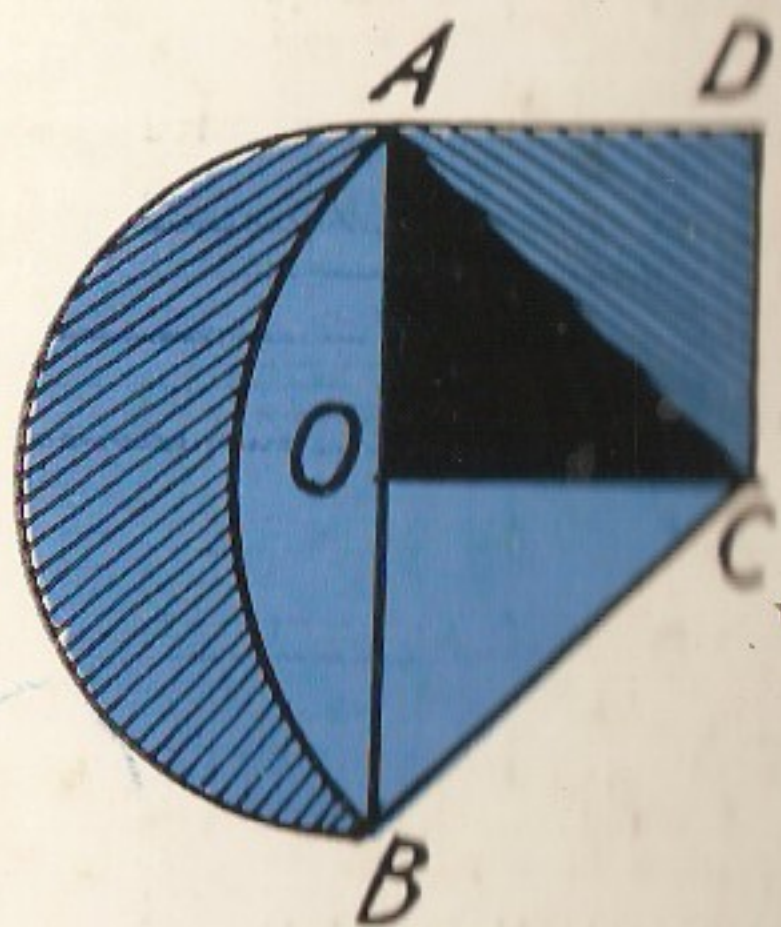


35 kóp.



JAKOV
PERELMAN

ELAV MATEMAATIKA



JAKOV PERELMAN ELAV
MATEMAATIKA

Lugusid matemaatikast ja nuputamisülesandeid

TALLINN «VALGUS» 1989

UDK 511+512+513

Originaali tiitel:
Я. И. Перельман
Живая математика
Математические рассказы и головоломки
Под редакцией и с дополнениями
В. Г. Болтянского

Издание 11-ое
Москва «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы
1978

Vene keelest tõlkinud U. Alas
Kaane kujundanud K. Tormis
Pildid joonistanud J. Kerem

Perelman, J.

P35 **Elav matemaatika.** — Tln.: Valgus, 1989. — 144 lk.: ill.

ISBN 5—440—446—7

Populaarteadusliku kirjanduse klassiku teos. Raamatus on mitmest matemaatika vallast haaravaid ülesandeid, millest paljud on esitatud jutustusena. Nende lahendamiseks pole vaja niivõrd sügavaid matemaatilisi teadmisi, kui tuleb üles näidata nutikust. Mõeldud eelkõige kooliõpilastele, kuid pakub meeldivat ja kasulikku ajaviidet ka täiskasvanutele.

P 1702000000—200 107—88
902(15)—88

22.1

Научно-популярное издание. Яков Исидорович Перельман. **Живая математика.** На эстонском языке. Перевод с русского языка У. Аласа. Художник-оформитель К. Тормис. Художник-иллюстратор Ю. Керем. Таллинн, «Валгус».
Toimetajad A. Espenberg ja H. Heinoja. Kunstiline toimetaja M. Henno. Tehniline toimetaja M. Suursalu. Korrektor M. Maide.
ИБ № 5519.

Laduda antud 20. 10. 88. Trükkida antud 3. 05. 89. Formaati 84×108/32. Trükipaber nr. 2. Kiri Literaturnaja. Kõrgtrükk. Tingtrükipoognaid 7,56. Tingvärvitõmmiseid 7,95. Arvestuspõognaid 7,61. Trükiarv 40 000. Tellimuse nr. 2562. Hind 35 kop. Kirjastus «Valgus», 200090 Tallinn, Pärnu mnt. 10. Trükikoda «Ühiselu», 200001 Tallinn, Pikk 40/42.

ISBN 5—440—446—7

© Tõlge eesti keelde, illustratsioonid.
Kirjastus «Valgus», 1989

Hommikueine nuputamisesülesannetega

1. Orav lagendikul. «Täna hommikul mängisin oravaga peitust,» rääkis keegi puhkekodus viibijaist hommikueine ajal söögilauas. «Kas teate meie metsas ümmargust lagendikku, mille keskel kasvab üksik kask? Selle puu taha orav end minu eest peitiski. Tihnikust välja jõudes märkasin kohe elavate silmadega loomanägu. Ettevaatlikult, puule mitte lähenedes, hakkasin mööda välu äärt ringi tegema, et loomakest näha. Neli korda tegin puule tiiru peale, aga too viguriyánt taganes minu eest tüve taha, näidates endiselt ainult koonu. Nii ei õnnestunudki mul teha ringi ümber orava.»

«Kuid,» vaidles keegi vastu, «ise te ju rääkisite, et tegite puule neli ringi peale.»

«Puule, mitte oravale.»

«Aga orav oli puu otsas.»

«See ei muuda asja.»

«Muudab küll: te kõndisite ka ümber orava.»

«Kuidas ma kõndisin, kui ei näinud tema selgagi?»

«Mis see selg siia puutub? Te kõndisite mööda ringi, mille keskel oli orav. Järelikult kõndisite ümber orava.»

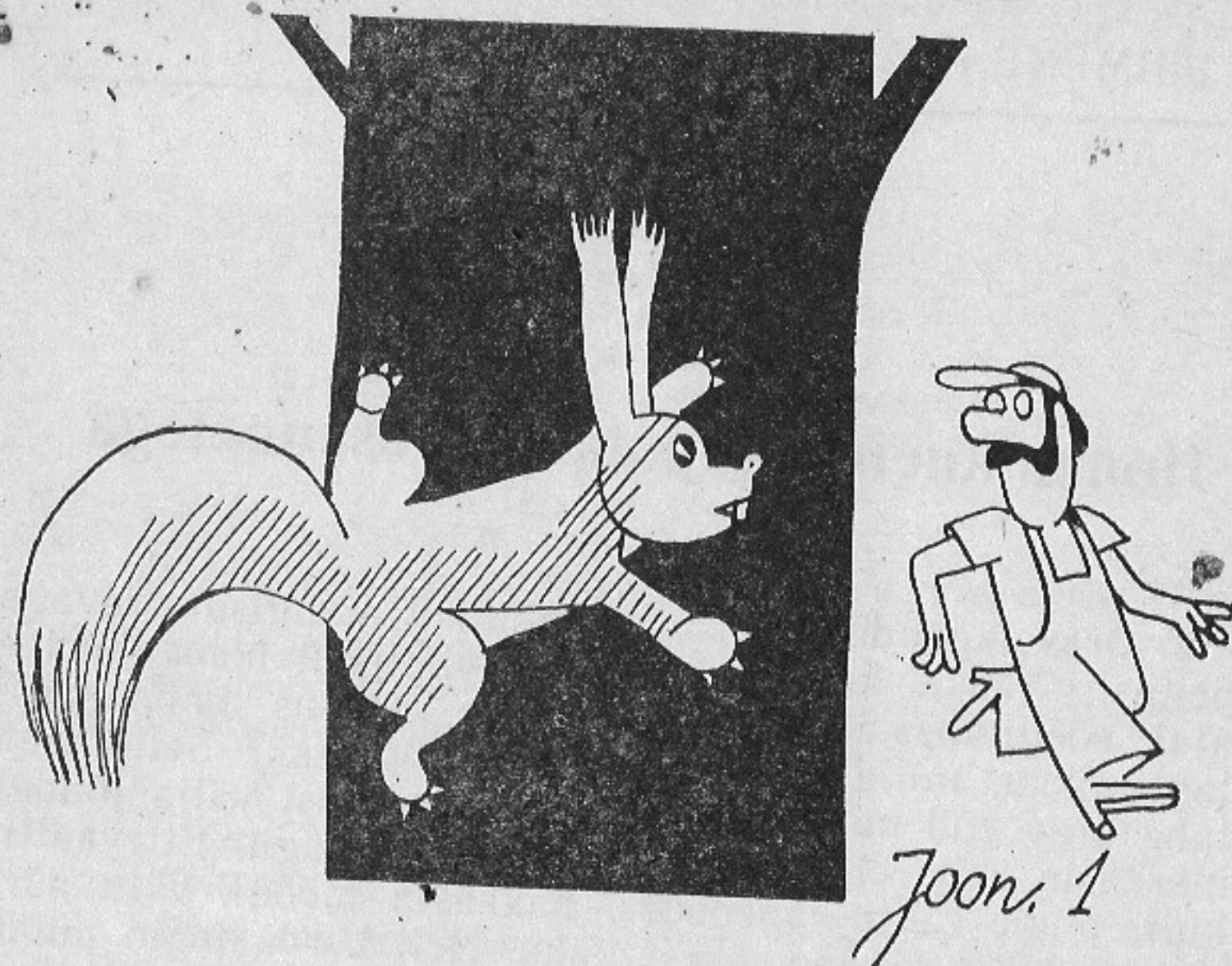
«Üldsegi mitte. Kujutlege, et kõnnin ümber teie mööda ringjoont ja teie pöörate end kogu aeg näoga minu poole, varjates selga. Kas ütlete, et ma ringlen ümber teie?»

«Muidugi.»

«Tiirlen ümber teie, sattumata kordagi teie selja taha?»

«Aitab juba sellest seljast. Asja tuum on selles, et te kõnnite ümber minu mööda kinnist joont, mitte selja nägemises.»

«Lubage: mis tähendab millegi ümber tiirlemine? Minu arvates ainult üht: muuta järgemööda asendit nii, et näha eset igast küljest. On ju õigus, professor?» pöördus vaidleja laua ääres istuva vanamehe poole.



«Teie vaidlete põhiliselt sõnade üle,» ütles teadlane. «Aga niisugusel juhul tulebki alustada sellest, millega te tegelesite: leppida kokku sõnade tähenduses. Kuidas saab mõista väljendit «liikuda ümber eseme»? Paistab, et kaht moodi. Esiteks liikumisena mööda suletud joont, mille sees on ese. Teiseks liikumisena, mille käigus nähakse eset igast küljest. Esimese tähenduse pooldajana tuleb teil tunnistada, et tegite neli tiiru ümber orava. Pidades õigeks teist tähendust, peate aga leppima tõsiasjaga, et ümber orava teil käia ei õnnestunudki. Nagu näete, pole vaidluseks mingit alust, tuleb üksnes kokku leppida sõnade tähenduses ja mõista neid ühtmoodi.»

«Olgu, sõnu võib mõista kaheti. Ent kumb tähendus on õigem?»

«Nii ei saa küsimust püstitada. Kokku võib leppida, milles tahes. Saab üksnes küsida, kumb tähendus on paremas kooskõlas üldiste arusaamadega. Minu arvates esimene, ja teate, miks? Teatavasti teeb Päike täispöörde ümber oma telje veidi rohkem kui 25 ööpäevaga.»

«Kas Päike siis pöörleb?»

«Muidugi. Ta pöörleb ümber oma telje nagu Maagi. Kujutlege nüüd, et Päike pöörleb aeglasemalt, tehes ühe pöörde mitte 25, vaid $365 \frac{1}{4}$ ööpäevaga, s. t. aastaga. Nõnda oleks ta pidevalt Maa poole ühe küljega; vastaspoolt, «Päikese selga», ei näeks me iialgi. Aga kas väidaks keegi seepärast, et Maa ei tiirle ümber Päikese?»

«Jah, nüüd saan aru, et ma siiski tiirlesin ümber orava.»

«On ettepanek, seltsimehed! Ärme lähemegi laiali!» ütles üks vaidluse kuulaja. «Et vihma kätte keegi jalutama ei lähe ning ilm ei paista niipea paranevat, siis veedame aega ühiselt, nuputades. Algas on tehtud. Las igaüks tuletab meelde või mõtleb välja midagi peamurdmiseks. Aga teie, professor, olge peakohtunikuks.»

«Kui see nuputamine sisaldab algebrat või geomeetriat, siis pean küll loobuma,» teatas noor naine.

«Mina samuti,» ühines temaga keegi.

«Ei-ei, osa peavad võtma kõik! Palume koosviibijaid matemaatika kõrvale jätta või siis piirduda selle algelega. Kas on vastuväiteid?»

«Siis olen nõus ja valmis esitama esimese ülesande.»

«Suurepärane! Palun!» kostis mitmelt poolt.

2. Ühisköögis. «Minu nuputamisülesanne sündis korteriolude tõttu, nii et seega olmeülesanne. Naisüüriline — nimetame teda lihtsuse mõttes Kolmesteks — pani ühise pliidi alla kolm halgu ja Viieste viis halgu. Halutu, kellel, nagu te taipate, endal puid ei olnud, sai Kolmestelt ja Viiestelt loa keeta pliidil sööki. Kulude katteks maksis ta naabritele kaheksa kopikat. Kuidas pidid need raha jaotama?»

«Pooleks,» kiirustas keegi vastama. «Halutu kasutas mõlema tuld võrdselt.»

«Minge ikka,» vaidles teine vastu, «tuleb ikka arvestada, mitu halgu keegi andis. See, kes pani tulle 3 halgu, peab saama ka kolm kopikat, ja kes andis 5 halgu — 5. Nii oleks õiglane.»

«Seltsimehed,» võttis sõna mängu algataja, keda nüüd peeti koosoleku juhatajaks. «Lepime kokku, et õigeid vastuseid me veel ei teata. Las igaüks mõtleb ise. Öhtusöögi ajal teatab kohtunik, mis on õige. Nüüd järgmine. Teie kord, pioneer!»

3. Õpilasingide töö. «Meie koolis,» alustas pioneer, «on viis ringi: treimis-, tislari-, foto-, male- ja koorilauluring. Treimisring töötab ülepäeviti, tislaring üle kahe päeva, foting igal kolmandal, malering neljandal ja koorilauluring igal viiendal päeval. Esimesel jaanuaril tulid kokku kõik viis ringi, edaspidi töötati rangelt plaani alusel. Küsimus: kui palju oli esimeses kvartalis veel õhtuid, millal kogunesid kõik viis ringi.»

«Kas see oli liig- või lihtaasta?»

«Lihtaasta.»

«Järelikult oli esimeses kvartalis — jaanuar, veebruar, märts — kokku üheksakümmend päeva.»

«Seda küll.»

«Lubage lisada teie küsimusele täienduseks veel üks,» ütles professor. «Kui palju oli esimeses kvartalis õhtuid, mil ei käinud koos ühtki ringi?»

«Ahaa, selge,» kostis hääl. «See ülesanne on tõmbekas. Pole sihukseid päevi — ei neid, mil töötavad kõik viis ringi, ega ka neid, kui kooli ei kogune ühtki.»

«Miks te nii arvate?» küsis juhataja.

«Ma ei tea isegi. Mulle lihtsalt tundub, et ülesanne on välja mõeldud meie lollitamiseks.»

«See pole küll põhjendus. Õhtul selgub, kui õige teie aimus oli. Teie kord, seltsimees!»

4. Kumb saab rohkem? «Kaks inimest loendasid tunni vältel möödujaid. Üks tegi seda, seistes värava ees, teine kõndis kõnniteel edasi-tagasi. Kumb sai rohkem möödujaid?»

«Loomulikult see, kes kõndis,» kostis laua teisest otsast.

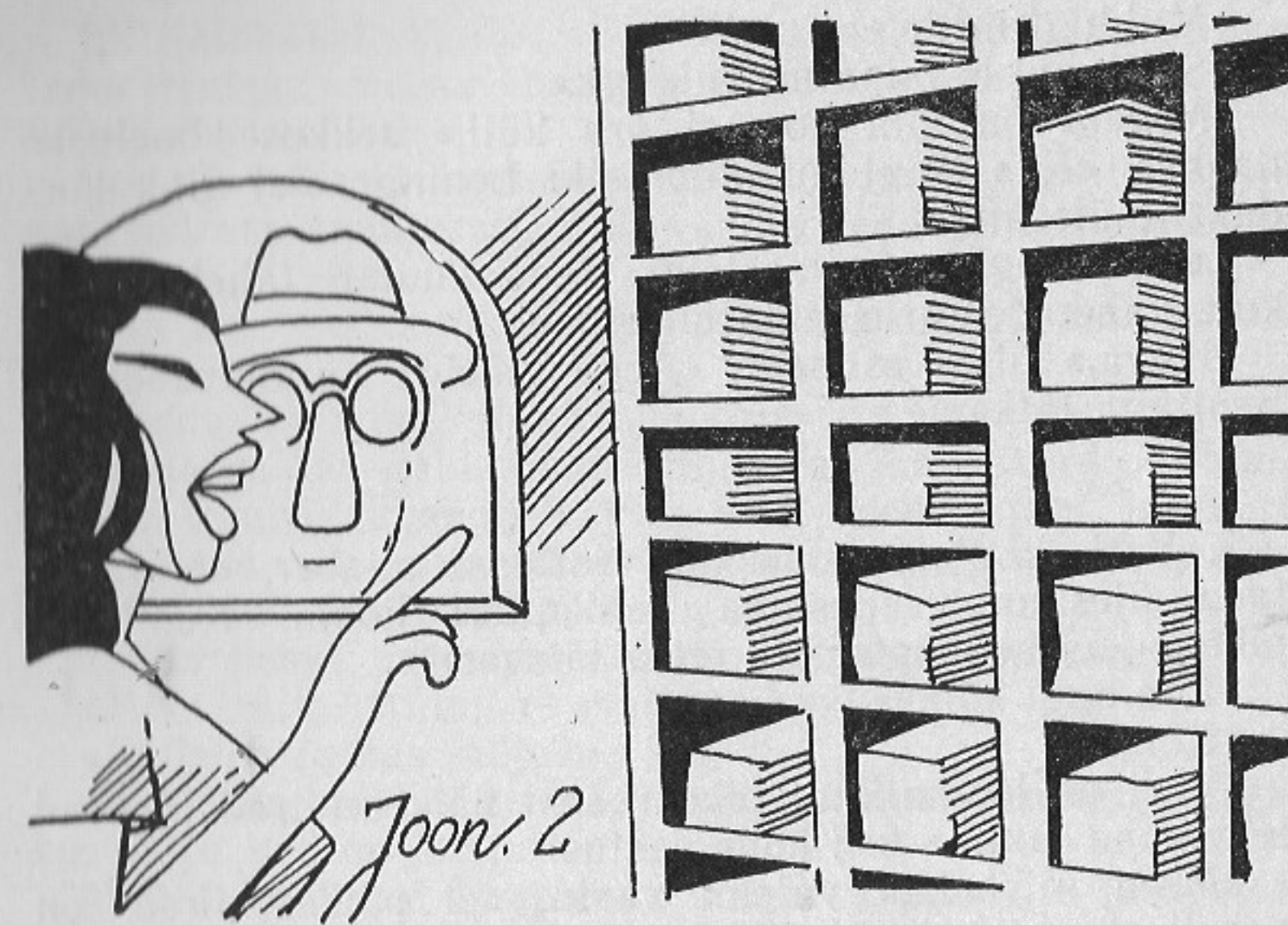
«Vastuse saame teada õhtusöögi ajal,» teatas juhataja. «Järgmine!»

5. Vanaisa ja lapselaps. «See juhtus 1932. a. Olin siis täpselt nii vana, kui näitasid minu sünniaasta kaks viimast numbrit. Kui rääkisin sellest vanaisale, ütles ta minu hämmastuseks, et temaga on sama lugu. Mulle näis see võimatu...»

«Muidugi võimatu,» ütles keegi.

«Kujutage ette, ei ole. Vanaisa tõestas seda. Kui vanad me olime?»

6. Raudteepiletid. «Mina töotan raudtee piletikassas,» alustas järgmine mängija. «See näib paljudele väga



lihtsa tööna. Ei kujutata ette, kui suure hulga piletitega tuleb tegelda isegi väikese jaama piletimüüjal. Peab ju sõitja saama sellest jaamast osta pileti kõikjale, kuhu seda raudteed mööda saab sõita. Töotan raudteel, mille ääres on 25 jaama. Kui palju eri pileteid müüakse selle raudtee kõigis piletikassades?»

«Teie kord, seltsimees lendur,» teadustas juhataja.

7. Helikopteri lend. «Helikopter lendas Leningradist otse põhja suunas. Lennanud 500 kilomeetrit, pöördus ta itta. Lennanud selles suunas 500 kilomeetrit, tegi helikopter uue pöörde, lõunasse, ja lendas 500 kilomeetrit. Seejärel pöördus ta läände, ja lennanud 500 kilomeetrit, maandus. Küsimus: kus paikneb helikopteri maandumiskohaks Leningradi suhtes, kas läänes, idas, põhjas või lõunas?»

«Te peate meid ohmudeks,» ütles keegi. «500 sammu ettepoole, 500 paremale, 500 taha ja 500 vasakule — kuhu me jõuame? Eks ikka sinna, kus alustasimegi.»

«Niisiis, kuhu maandus helikopter?»

«Samale Leningradi lennuväljale, kust õhku tõusiski, kas pole õige?»

«Muidugi mitte.»

«Sel juhul ei taipa ma midagi.»

«Midagi on siin korrast ära küll,» sekkus kõnelusse naaber. «Kas ta ei maandunudki Leningradis? Ehk kordaksite ülesannet.»

Lendur tegi seda meeleldi. Teda kuulati tähelepanelikult, vahetades arusaamatuid pilke.

«Hüva,» ütles esimees. «Aega mõelda on õhtusöögini. Seni aga jätkame.»

8. Vari. «Lubage,» sekkus vestlusse naaber, «mul esitada ülesanne sellesama helikopteri kohta. Kumb on pikem, kas helikopter või tema täisvari?»

«Kas ongi kõik?»

«Kõik.»

«Vari on loomulikult pikem, sest päikesekiired lähevad lehvikuna laiali,» tuli kohe vastus.

«Mina ütleksin,» vaieldi vastu, «et päikesekiired on paralleelsed; vari ja helikopter on ühepikkused.»

«Mis te nüüd! Kas te pole siis näinud, kui laiali lähevad pilve taha peitunud päikese kiired? Siis võib oma silmaga veenduda, kui tugevasti päikesekiired hajuvad. Vari peaks olema kopterist tunduvalt suurem, nagu pilve vari on suurem pilvest.»

«Aga miks peetakse siis päikesekiiri paralleelseteks? Meremehed, astronoomid — kõik arvavad nii...»

Juhataja ei lasknud vaidlust lõkkele lüüa, vaid andis sõna järgmisele mõistatuseandjale.

9. Tikuülesanne. Järjekordne kõneleja puistas lauale tühjaks tikutoosi ja hakkas tikke tõstma kolme hunnikusse.

«Kas kavatsete lõket teha?» naljatasid kuulajad.

«See,» ütles mõistatuseandja, «tuleb tikuülesanne. Nad on kolmes eri suurusega hunnikus. Kokku on tikke 48. Seda, kui palju igas hunnikus on, peate ise ära arvama. Ütlen ainult niipalju: kui panen esimesest hunnikust teise niipalju tikke, kui seal varem oli, seejärel teisest hunnikust kolmandasse niipalju, kui oli kolmandas, ja lõpuks tõstan kolmandast esimesse nii palju, kui esimeses kuhjas tikke on, siis on tikke kõikides kuhjades ühepalju. Kui palju oli tikke kuhjades algul?»

10. Salakaval käänd. «See nuputamisülesanne,» ütles tema naaber, «meenutab mulle üht, mida kuulsin tuttavalt külamatemaatikult.»

See oli pikk ja kentsakas lugu. Talupoeg kohtas metsas võõrast vanameest. Too vaatas teda tähelepanelikult ja ütles:

«Ma tean selles metsas üht imelikku käändu, mis hädas aitab.»

«Kuidas ta aitab? Kas ravib või?»

«Seda ei tea öelda, aga raha teeb kaks korda rohkemaks. Paned rahakoti kännu alla, loed sajani ja ongi kõik: raha on kotis kaks korda nii palju kui varem. Nisuke käänd on. Imeline käänd.»

«Seda peaks proovima,» ütles talumees unistavalt.

«Miks mitte? Ainult et maksta peab.»

«Kellele? Ja kas palju?»

«Eks ikka sellele, kes teed näitab. Mulle muidugi. Aga kui palju, see on ise jutt.»

Mehed hakkasid kauplema. Teada saanud, et talupojal on raha vähe, nõustus vanamees 1 rubla 20 kopikaga iga kahekordistamise pealt. Siis löödi käed.

Vanamees viis talupoja sügavasse metsa, kõndis temaga kaua, kuni lõpuks otsis põõsastikust üles vana, samblaga kaetud kuusekännu. Võtnud talupoja käest kukru, torkas ta selle juurte vahele. Loeti sajani. Vanamees kummardus maha, tuhnis kännu all, võttis lõpuks rahakoti välja ja andis talumehele.

Talumees vaatas kukrusse ja ennäe imet, raha oligi kaks korda rohkem. Andnud vanamehele lubatud 1 rubla 20 kopikat, palus ta rahakoti uuesti imekännu alla panna.

Uuesti loeti sajani, jälle kohmitses vanamees kännu juures põõsastes, ja taas sündis ime: rahasumma kotis oli kahekordistunud. Vanamees sai teist korda 1 rubla 20 kopikat.

Peideti rahakott kolmandat korda juurte alla. Raha kahekordistus ka seekord. Ent kui talupoeg oli maksnud vanamehele lubatud tasu, leidis ta, et rahakott oli tühi. Vaene mees oli kaotanud kogu raha. Enam polnud kahekordistada midagi ja talupoeg lahkus kurvast metsast.

Raha imepärase kahekordistumise saladust te loomulikult taipasite: ega vanamees ilmaasjata tihnikus kopitsenud, kui rahakoti välja võttis. Ent kas oskate vastata ka teisele küsimusele: kui palju oli talupojal raha enne kurba kogemust salakavala kännu juures?»

11. Ülesanne detsembrikku kohta. «Mina, seltsimehed, olen keeleteadlane ja hoian kaugele igasugusest matemaatikast,» alustas elatanud mees, kelleni oli jõudnud ülesande esitamise kord. «Seepärast ärge oodakegi minult matemaatikaülesannet. Oskan ülesannet esitada üksnes alalt, mida tunnen. Kas lubate esitada küsimust kalendri kohta?»

«Palun.»

«Me nimetame aasta kaheteistkümnendat kuud detsembriks. Aga kas teate, mida see sõna õieti tähendab? See tuleneb kreeka sõnast «deka» — kümme. Siit on pärit ka sõnad «dekaliiter» — kümme liitrit, «dekaad» — kümme päeva jne. Järelikult kannab detsember kümnenda kuu nime. Millega seletada seda vastuolu?»

«Noh, nüüd on jäänud veel ainult üks mõistatus,» ütles juhataja.

12. Arvutrik. «Mina esinen viimasena, kaheteistkümnendana. Vahelduse mõttes demonstreerin teile arvutriki. Teie ülesanne on leida selle saladus. Las keegi, kasvõi teie, seltsimees juhataja, kirjutab paberile minu eest salaja ühe kolmekohalise arvu.»

«Kas selles võib nulle ka olla?»

«Kitsendusi ei ole. See võib olla suvaline kolmekohaline arv.»

«Tehtud. Mis nüüd?»

«Kirjutage selle arvu järele veel kord sama arv. Saate kuuekohalise arvu.»

«Valmis. Kuuekohaline arv.»

«Andke paber nüüd edasi naabrile, kes istub minust kaugemal. Las ta jagab selle arvu 7-ga.»

«Seda on kerge öelda. Aga kui tuleb jääk?»

«Ärge muretsege, jääki ei tule.»

«Te olete selles kindel, kuigi arvu ei tea.»

«Jagage juba, pärast vaatame.»

«Teie õnneks jaguski.»

«Andke tulemus mulle teatamata edasi oma naabrile. Tema jagab selle 11-ga.»

«Arvate, et teil jälle veab ja arv jagub?»

«Jagage, jääki ei tule.»

«Tõepoolest! Mis nüüd?»

«Andke tulemus edasi. Jagage see, ütleme, 13-ga.»

«Halvasti valitud. 13-ga jagub vähe arve... Aga ei, jagus! Küll teil alles veab.»

«Andke paber mulle. Aga enne murdke see kokku, nii et ma tulemust ei näeks.»

Paberitükki lahti tegemata ulatas «mustkunstnik» selle juhatajale. «Palun, siin on teie poolt mõeldud arv. Kas on õige?»

«Täiesti õige,» ütles too imestunult paberile vaadates. «Selle arvu ma enne välja mõtlesingi... Nüüd on kõik oma ülesande esitanud. Lubage mul koosolek lõpetada. Onneks on ka vihm lakanud. Nuputamisülesannete vastused teatatakse veel täna, pärast õhtusööki. Sedelid lahen dustega võite anda mulle.»

Nuputamisülesannete 1—12 vastused

1. Oravaga ülesanne sai täielikult vaadeldud juba varem. Siirdume järgmise juurde.

2. Paljud arvavad valesti, et 8 kopikat on makstud 8 halu eest, kopikas halg. Need 8 kopikat on makstud kõigest kolmandiku eest kaheksast halust, sest tuld kasutasid kõik kolm võrdselt. Sellest järeldub, et 8 halgu maksab $3 \times 8 = 24$ kopikat. Ühe halu hinnaks tuleb 3 kopikat.

Nüüd on üsna hõlbus leida, kui palju kellelgi tuleb maksta. Viie halu eest peab Viieste saama 15 kopikat, aga et ta ise kasutas pliiti 8 kopika eest, siis saab ta $15 - 8 = 7$ kopikat, Kolmeste saaks 3 halu eest 9 kopikat, aga kui maha arvata 8 kopikat, mis maksis pliidi kasutamise, jääb järele $9 - 8 = 1$ kopikas.

Niisiis peab Viieste saama õiglase jaotuse korral 7 kopikat ja Kolmeste 1 kopika.

3. Esimesele küsimusele — mitme päeva pärast kogunevad uuesti korraga kõik 5 ringi — saame vastata kergesti, kui oskame leida vähimat arvu, mis jagub 2, 3, 4, 5 ja 6-ga. See arv on 60. Järelikult kogunevad kõik ringid uuesti korraga 61. päeval: treialite ring, mis töötab igal 2. päeval, on koos 30 korda, tiserite ring, mis töötab igal 3. päeval, 20 korda, fotograafiaring — igal 4. päeval — 15 korda, malering — igal 5. päeval — 12 korda ja koorilauluring — igal 6. päeval — 10 korda. Enne 60 päeva niisugust õhtut ei tule. Järgmine samasugune õhtu on jälle 60 päeva pärast, s. o. juba teises kvartalis.

Niisiis on esimeses kvartalis veel ainult üks õhtu, milal töötavad koos kõik viis ringi.

Tülikas on vastata küsimusele, mitmel õhtul ei tööta ühtki ringi. Nende päevade leidmiseks tuleb kirjutada paberile kõik arvud 1-st 90-ni ja tõmmata nende seast järjekorras maha kõik treimisringi tööpäevad, s. o. arvud 1, 3, 5, 7, 9 jne. Seejärel tuleb maha tõmmata tislerringi tööpäevad: 4, 7, 10 jne. Siis tõmbame maha foto-, male- ja koorilauluringi tööpäevad. Alles jäänud arvud näitavad päevi, millal ükski ring ei tööta. Kes selle töö läbi teeb, veendub, et ringitööst vabu päevi on kvartalis üsna palju — 24. Jaanuaris on neid 8 — 2., 8., 12., 14., 18., 20., 24. ja 30. jaanuar. Veebruaris on neid päevi 7, märtsis 9.

4. Mõlemad loendasid möödujaid ühepalju. Kuigi värava juures seisja loendas mõlemas suunas möödujaid, nägi teine kaks korda rohkem vastutulijaid.

Võib arutleda ka teisiti. Kui kõndiv loendaja jõudis esimest korda tagasi seisva loendaja juurde, said nad möödujaid ühepalju — igaüks, kes läks mööda seisjast, pidi kohtama ka kõndijat (kas siis teel edasi või tagasi) ja vastupidi. Ning iga kord seisja juurde jõudes sai kõndija temaga ühepalju möödujaid. Nii oli see ka tunni möödudes, kui nad viimast korda kohtusid ja teatasid teineteisele loenduse tulemuse.

5. Esimesel pilgul võib tõesti tunduda, et ülesanne on koostatud valesti: tuleks nagu välja, et vanaisa ja lapselaps on ühevanused. Aga kohe veendume, et ülesande tingimused on kergesti täidetavad.

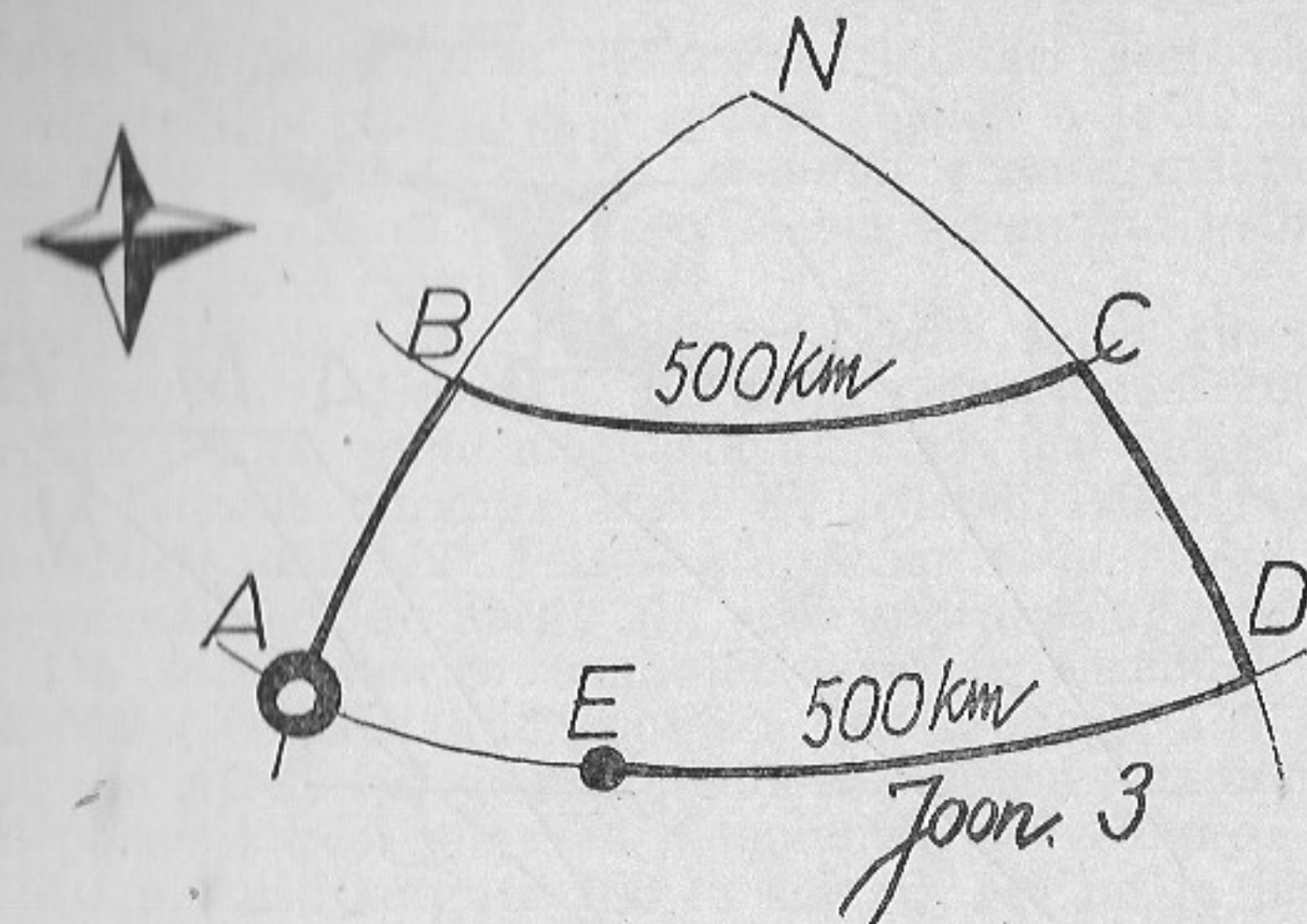
Lapselaps sündis ilmselt 20. sajandil. Tema sünniaasta kaks esimest numbrit (sajaliste arv) on 19. Ülejäänud kaks numbrit moodustavad arvu, mis iseenesega liites peab andma 32. Järelikult on see arv 16: lapselaps sündis 1916. aastal ja 1932. a. oli ta 16-aastane.

Vanaisa sündis muidugi 19. sajandil. Tema sünniaasta kaks esimest numbrit on 18. Ülejäänud numbrid annavad arvu, mille kahekordne on 132. Järelikult on see arv võrdne poolega 132-st, s. o. 66. Vanaisa sündis 1868. a. ja oli 1932. a. 66-aastane.

Nõnda olid nii vanaisa kui ka lapselaps 1932. a. nii vanad, nagu näitasid nende sünniaasta kaks viimast numbrit.

6. Igaühes 25-st jaamast võivad sõitjad nõuda pileteid kõigi ülejäänud jaamadeni, see on 24 eri kohta. Järelikult peab eri pileteid trükkima $25 \times 24 = 600$.

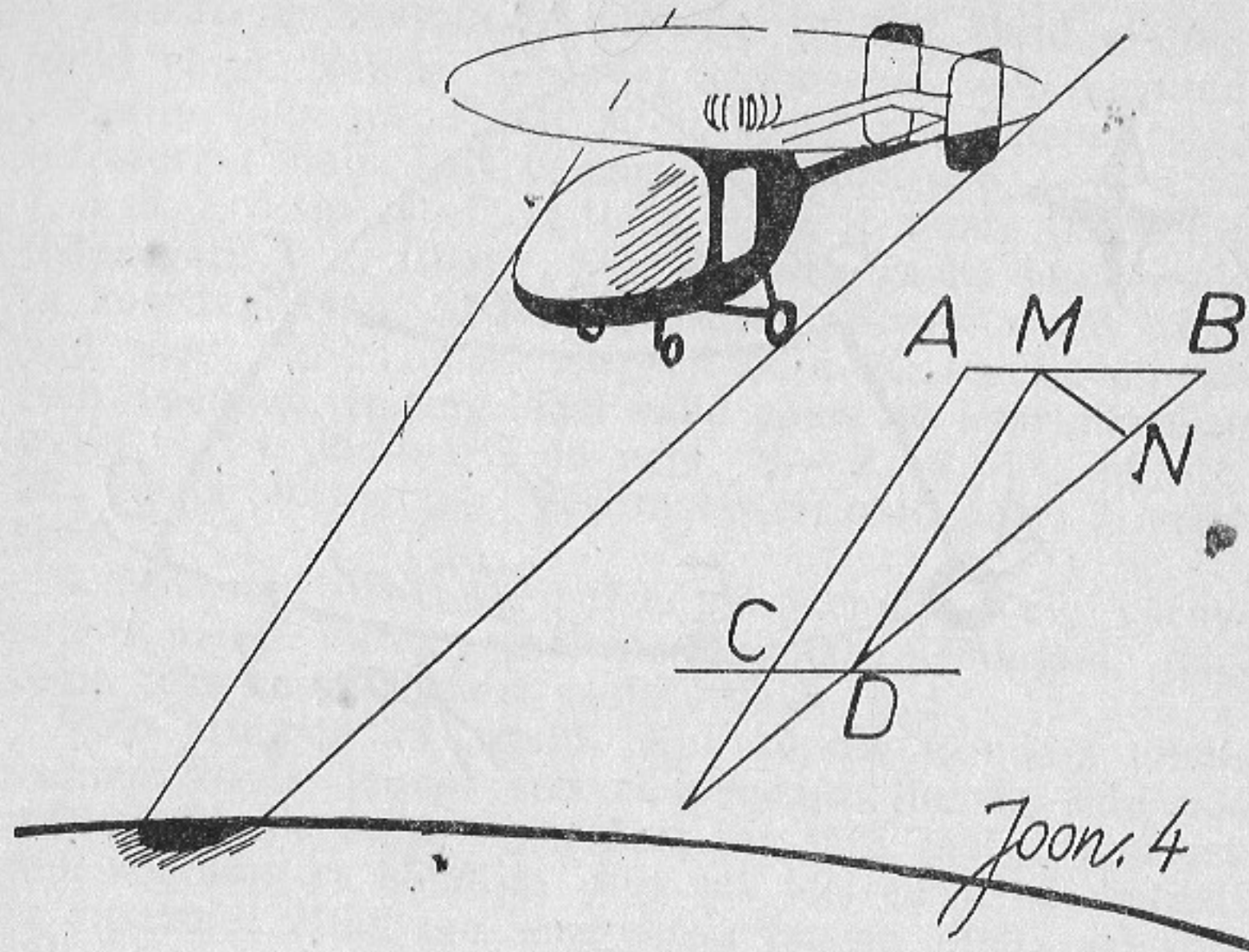
Kui sõitjad saavad osta peale otsepiletite («sinna») ka



tagasisõidupiletid («sinna ja tagasi»), kasvab eri pilettide arv kahekordseks, s. o. neid peab olema 1200.

7. Selles ülesandes pole mingit vastuolu. Ei pea arvama, et helikopter lendas mööda ruudu kontuure: tuleb arvestada Maa kerakujulisust. Põhja pool meridiaanid lähenevad üksteisele (joon. 3). Seetõttu, lennates 500 km piki põhjapoolsemat paralleeli BC itta, läbis helikopter rohkem kraade kui pärast piki Leningradi paralleeli DA läände lennates. Tulemusena maandus helikopter lennu lõppedes Leningradist idapool.

Aga kui suur see erinevus on? Võime selle välja arvutada. Joonisel 3 näete helikopteri marsruuti ABCDE. Punkt N on põhjapoolus; selles punktis meridiaanid AB ja DC lõikuvad. Põhja lendas helikopter 500 km mööda meridiaani AN. Et meridiaanikraadi kaare pikkus on 111 km, siis sisaldab 500 km pikkuse meridiaani kaar $500 : 111 \approx 4,5^\circ$. Leningrad asub 60° paralleelil, mistõttu punkt B asub laiusel $60^\circ + 4,5^\circ = 64,5^\circ$. Seejärel lendas helikopter 500 km itta, s. o. mööda paralleeli BC. Ühe kraadi pikkuse sellel paralleelil võib ka arvutada (või leida tabelist); see on umbes 48 km. Nüüd saame hõlpsasti leida, mitu kraadi lendas helikopter itta: $500 : 48 \approx 10,4^\circ$. Edasi lendas helikopter lõunasse, s. o. mööda meridiaani CD ja asus pärast 500 km läbimist uuesti



Leningradi laiuskraadil. Nüüd on kurss võetud läände, s. o. mööda paralleeli AD ; 500 km seda teed on ilmselt vähem kui kaugus AD . Paralleelikaares AD on sama palju kraade kui kaares BC , s. o. $10,4^\circ$. Aga ühe kraadi pikkus 60. laiuskraadil on ligikaudu 55,5 km. Järelikult on A ja D vahekaugus $55,5 \times 10,4 \approx 577$ km. Näeme, et helikopter ei saanud maanduda Leningradi, puudu jäi 77 km, s. o. ta asus Laadoga järve kohal ja pidi laskuma vette.

8. Selle ülesande üle mõtteid vahetades tehti hulgaliselt vigu. Pole õige, et Maale langevad päikesekiired hajuvad märgatavalt. Maa on nii väike, võrreldes tema kaugusega Päikesest, et päikesekiired, mis langevad mõnele tema pinnatükile, hajuvad kaduvväikese nurga võrra: praktiliselt võib neid pidada paralleelseteks. See, et mõnikord täheldatakse kiiri lehvikuna hajumas (nn. pilvetagune hajumine), pole muud kui perspektiivi ilming.

Perspektiivis paistavad paralleelsed sirged koonduvat; meenutage näiteks kaugusse suunduvaid raudteerööpaid või pikka puiesteed.

Aga Maale langevate päikesekiirte paralleelsusest ei

järeldu veel sugugi, et helikopteri täisvari peab olema helikopteriga ühepikkune. Vaadake joonist 4 ja te mõistate, et helikopteri täisvari koondub ruumis maapinna suunas ja järelikult peab vari olema lühem kui helikopter; joon CD on lühem kui AB .

Kui helikopteri kõrgus on teada, võib selle erinevuse välja arvutada. Lennaku helikopter maapinnast 100 m kõrgusel. Nurk, mille moodustavad omavahel sirged AC ja BD , võrdub nurgaga, mille all paistab Päike Maalt; see on ligikaudu $1/2^\circ$. Teisest küljest on teada, et iga ese, mis paistab $1/2^\circ$ -se nurga all, asub sellest kaugusel, mis on 115 korda suurem tema läbimõõdust. Järelikult on lõik MN (see paistab maapinnale $1/2^\circ$ -se nurga all) 115-ndik osa AC -st. AC pikkus ületab A kõrguse maapinnast. Kui päikesekiired langevad maapinnale 45° -se nurga all, on AC pikkus (kõrguse 100 m korral) 140 m, ja järelikult on lõik MN võrdne $140 : 115 \approx 1,2$ m.

Kuid helikopteri ja varju pikkuste vahe, s. t. lõik MB , on suurem kui MN ja tervelt 1,4 korda, sest nurk MBD on peaaegu võrdne 45° -ga. Järelikult on MB pikkus $1,2 \times 1,4 \approx 1,7$ m.

Kõik öeldu peab paika üksnes tumeda ja teravaservalise täisvarju korral, nõrga ja laialivalguva poolvarju korral see ei kehti.

Muide, meie arvutus näitab, et kui helikopteri asemel oleks õhupall läbimõõduga alla 1,7 m, siis poleks tal üldse täisvarju; võiks näha üksnes tema ähmast poolvarju.

9. Seda ülesannet hakatakse lahendama tagant ettepoole. Oletame, et ümbertõstmised on tehtud ja tikke hunnikutes ühepalju. Et ümbertõstmiste ajal tikkude arv (48) ei muutunud, siis on neid igas hunnikus 16.

Niisiis on neid ülesande lõpuks:

1. hunnik	2. hunnik	3. hunnik
16	16	16

Vahetult enne seda oli esimesse hunnikusse lisatud nii-sama palju tikke, kui seal oli varem olnud; teisisõnu tikkude hulk selles hunnikus kahekordistub. Järelikult polnud enne viimast ümbertõstmist esimeses hunnikus 16, vaid ainult 8 tikku ning kolmandas hunnikus, kust tikud võeti, oli neid $16 + 8 = 24$.

Nüüd saadakse tikkude arvuks:

1. hunnik	2. hunnik	3. hunnik
8	16	24

Edasi. Teatavasti oli enne seda teisest hunnikust kolmandasse tõstetud nii palju tikke, kui seal oli varem. Järelikult on 24 esialgsega võrreldes kahekordne tikkude arv. Saame teada, et pärast esimest ümbertõstmist oli tikke:

1. hunnik	2. hunnik	3. hunnik
8	$16 + 12 = 28$	12

Hõlpsasti leiame ka selle, et enne esimest ümbertõstmist (s. t. enne seda, kui esimesest hunnikust tõsteti teise hunnikusse nii palju, kui seal oli) olid tikud jaotatud järgmiselt:

1. hunnik	2. hunnik	3. hunnik
22	14	12

See on tikkude esialgne arv hunnikutes.

10. Ka seda keerdulesannet on lihtsam lahendada tagant ettepoole. Teame, et pärast kolmandat kahekordistamist oli rahakotis 1 rbl. 20 kop. (selle summa sai vanamees pärast viimast kahekordistamist.) Kui palju oli raha enne kahekordistamist? Loomulikult 60 kop. Need 60 kop. jäid alles pärast seda, kui talumees oli maksnud vanamehele 1 rbl. 20 kop. Enne maksmist oli raha 1 rbl. 20 kop. + 60 kop. = 1 rbl. 80 kop.

Edasi. 1 rbl. 80 kop. oli rahakotis pärast teist kahekordistamist, enne seda oli seal kõigest 90 kop., mis jäi järele, kui talunik maksis esimest korda ära 1 rbl. 20 kop. Siit saame teada, et enne maksmist oli rahakotis 90 kop. + 1 rbl. 20 kop. = 2 rbl. 10 kop. See summa oli rahakotis pärast esimest kahekordistamist; enne oli kukrus poole vähem — 1 rbl. 5 kop. See oligi rahasumma, millega talumees alustas oma ebaõnnestunud finantsoperatsiooni.

Kontrollime tulemust:
raha kukrus:

pärast 1. kahekordistamist	1 rbl. 5 kop. $\times 2 = 2.10$
„ 1. maksmist	2 rbl. 10 kop. —
	— 1 rbl. 20 kop. = 90 kop.,

„ 2. kahekordistamist	90 kop. $\times 2 = 1$ rbl. 80 kop.
„ 2. maksmist	1 rbl. 80 kop. —
	— 1 rbl. 20 kop. = 60 kop.
„ 3. kahekordistamist	60 kop. $\times 2 = 1$ rbl. 20 kop.
„ 3. maksmist	1 rbl. 20 kop. —
	— 1 rbl. 20 kop. = 0

11. Meie kalender pärineb vanadelt roomlastelt. Roomlaste aasta (enne Julius Caesarit) ei alanud 1. jaanuarist, vaid 1. märtsist. Järelikult oli detsember kümnes kuu. Uusaasta viimisega 1. jaanuarile ei kaasnenud muutusi kuude nimetuses. Sellest saigi alguse mittevastavus kuude nimetuste ja järjenumbrite vahel.

Kuu nimetus Nimetuse tähendus Kuu järjenumber

September	seitsmes	9
Oktoober	kaheksas	10
November	üheksas	11
Detsember	kümnes	12

12. Vaatame järele, mida arvuga tehti. Kõigepealt kirjutati selle arvu järele sama arv. See on sama, kui kirjutada arvule järele kolm nulli ja liita sellele esialgne arv; näiteks

$$872\,872 = 872\,000 + 872.$$

Nüüd on selge, mis arvuga tehti: ta korrutati 1000-ga ja liideti veel sama arv juurde; — lühidalt, see arv korrutati 1001-ga.

Mida selle korrutisega tehti? Ta jagati järgemööda 7, 11 ja 13-ga. Lõpptulemuseks jagati $7 \times 11 \times 13$ -ga, s. o. 1001-ga.

Niisiis korrutati mõeldud arv algul 1001-ga ja pärast jagati sellega. Kas on tõesti vaja üllatuda, et lõpptulemusena saadi tagasi esialgne arv?

* * *

Enne kui lõpetan peatüki puhkekodu nuputamistülesannetest, tutvustan teile veel kolme arvutriki, mida võite pakkuda oma sõpradele ajaviiteks. Neist kaks on arvude äraarvamisest, kolmas asjade omaniku leidmisest.

Need on vanad trikid ja võib-olla teile tuttavadki, kuid

vaevalt teavad kõik, millel need põhinevad. Aga tundmata triki teoreetilist alust ei saa seda teadlikult ja kindlalt sooritada. Kahe esimese triki selgitamine nõuab meilt väga tagasihoidlikku ja sugugi mitte väsitavat ekskursiooni elementaaralgebra valdkonda.

13. Mahatõmmatud number. Mõelgu teie sõber välja mingi mitmekohaline arv, näiteks 847. Tehke talle ettepanek leida selle arvu ristsumma ($8 + 4 + 7 = 19$) ja lahutada see mõeldud arvust. Lahendaja saab:

$$847 - 19 = 828.$$

Tõmmaku sõber saadud arvus maha suvalise numbri ja teatagu teile ülejäänud. Kuigi te ei tea arvu ega ole näinud, mis sellega tehti, ütlete otsekohe, milline number maha tõmmati.

Kuidas te sellega hakkama saate ja milles on triki saladus?

Tehakse seda väga lihtsalt: leitakse number, mis liidetuna teile teatud numbrile annab summaks lähima üheksaga jaguva arvu. Kui näiteks arvus 828 oli maha tõmmatud esimene number (8) ja teile öeldakse numbrid 2 ja 8, siis, nagu taipate, jääb lähimast 9-ga jaguvast arvust, s. o. 18-st puudu 8. See ongi mahatõmmatud arv.

Miks see nii on? Aga sellepärast, et kui arvust lahutatakse tema ristsumma, saadakse 9-ga jaguv arv; teisistõnu, saadakse arv, mille ristsumma jagub 9-ga. Tõepoolest, olgu mõeldud arvus a sajaliste number, b kümneliste number ja c üheliste number. Selle arvu võib kirjutada nõnda:

$$100a + 10b + c.$$

Lahutame sellest arvust tema ristsumma:

$$100a + 10b + c - (a + b + c) = 99a + 9b = 9(11a + b).$$

Arv $9(11a + b)$ jagub jäägita üheksaga ning 9-ga peab jäägita jaguma ka tema ristsumma.

Võib juhtuda, et teile teatatud numbrite summa jagub ise 9-ga (näiteks öeldakse teile 4 ja 5). See tähendab, et mahatõmmatud arv on kas 9 või 0. Nii peategi vastama: kas 9 või 0.

Sellel trikil on teisend: ristsumma leidmise asemel lahutatakse arv, mis saadakse antud numbrite ümbertõstmise teel. Näiteks võib 8247-st lahutada 2748 (kui numb-

reid ümber tõstes saadakse antud arvust suurem arv, lahutatakse suuremast väiksem). Seejärel toimitakse nagu varem: $8247 - 2748 = 5499$. Kui tõmmata maha number 4, siis teades numbreid 5, 9 ja 9, te leiате summa $5 + 9 + 9 = 23$. Lähima 9-ga jaguva arvu 27 saamiseks tuleb liita 4. Järelikult ongi 4 otsitud number.

14. Arvu mõistatamine midagi küsimata. Te teete sõbrale ettepaneku mõelda suvaline kolmekohaline arv, mis ei lõpe nulliga (kuid nii, et esimene ja viimane number erineksid vähemalt 2 võrra) ja palute kirjutada selle numbrid vastupidises järjekorras. Seda teinud, lahutagu sõber suuremast arvust väiksem. Nüüd kirjutagu sõber ka saadud vahe tagurpidi ja liitku saadud arvud kokku. Mõistatajalt midagi küsimata teatate talle arvu, mille ta sai.

Kui mõeldud arv oli näiteks 467, siis pidi mõistataja sooritama järgmised tehted:

$$\begin{array}{r} 467; \quad 764; \quad - \begin{array}{r} 764 \\ 467 \end{array} \quad + \begin{array}{r} 297 \\ 792 \end{array} \\ \hline \quad \quad \quad 297 \quad \quad 1089 \end{array}$$

Selle lõpptulemuse — 1089 — te mõistatajale teatategi. Kuidas te selle ära arvasite?

Vaatleme seda ülesannet üldkujul. Võtame arvu numbritega a, b, c , kusjuures a ja c vahe ärgu olgu väiksem kui 2. See arv avaldub kujul:

$$100a + 10b + c.$$

Kirjutame arvu tagurpidi:

$$100c + 10b + a.$$

Nende arvude vahe on

$$99a - 99c.$$

Sooritame järgmised teisendused:

$$\begin{aligned} 99a - 99c &= 100(a - c) - (a - c) = 100(a - c) - \\ &- 100 + 100 - 10 + 10 - a + c = 100(a - c - 1) + \\ &+ 90 + (10 - a + c) \end{aligned}$$

See arv koosneb kolmest numbrist

sajaliste number: $a - c - 1$,

kümneliste number: 9,

üheliste number: $10 + c - a$.

Tagurpidi kirjutatuna on see arv

$$100(10 + c - a) + 90 + (a - c - 1).$$

Liites arvud

$$100(a-c-1) + 90 + 10 + c - a$$

ja

$$100(10+c-a) + 90 + a - c - 1,$$

saame

$$100 \times 9 + 180 + 9 = 1089.$$

Niisiis on tulemus a , b ja c valikust sõltumata üks ja sama arv: 1089. Seepärast käib teil arvutustulemuse äraarvamine õige lihtsalt: te teate seda juba varem.

Selge on ka see, et ühe ja sama inimese juuresolekul ei tohi seda trikki teha rohkem kui ühe korra: muidu tuleks selle saladus kohe välja.

15. Kes võttis mida? Selle teravmeelse triki sooritamiseks on vaja kolme väikest eset, mis mahuvad ilusasti tasku, näiteks pliiatsit, võtit ja taskunuga. Lisaks asetage lauale taldrik 24 pähkliga; pähklite puudumisel kõlbavad ka kabe- või doominonupud, tikud jms. Te teete kolmele sõbrale ettepaneku pista teie äraoleku ajal tasku pliiats, võti või nuga, nagu kellelegi meeldib. Teie lubate ära arvata, mis kellelgi on. Mõistatamine toimub järgmiselt. Pärast esemete taskusse peitmist tulete tuppa tagasi ja annate alustuseks sõpradest ühele ühe, teisele kaks ja kolmandale kolm pähklit. Siis lahkute uuesti toast, andnud sõpradele järgmise juhise: pliiatsi võtja peab võtma taldrikult juurde nii palju pähkleid, kui tal on, võtme omaja võtab kaks korda rohkem ja see, kellel on taskus nuga, võtab neli korda rohkem pähkleid, kui tal varem oli.

Ülejäänud pähklid jäävad taldrikule.

Pärast sõprade märguannet tuppa naastes heidate pilgu taldrikule ja ütlete kohe, missugune ese on kellelgi taskus.

Trikk tekitab osavõtjate seas seda suuremat hämmeldust, et te sooritate selle salajase abiliseta, kes annaks teile vargsi märku. Ja seejuures pole mingit pettust: kõik rajaneb täielikult aritmeetikal. Te leiaste esemete omanikud üles taldrikule jäänud pähklite arvu järgi. Pähkleid jääb vähe, 1-st 7-ni, ja neid võib ainsa pilguga üle lugeda. Kuidas ikkagi jäägi järgi leida, missuguse eseme keegi võttis?

Väga lihtsalt: igale esemete sõprade vahel jaotamise juhule vastab erinev ülejäänud pähklite hulk. Kohe veendute selles.

Olgu teie sõprade nimed Bruno, Georg ja Konstantin. Tähistame nad nime algustähtedega: B , G ja K . Ka esemed tähistame tähtedega: pliiats a , võti b ja nuga c . Kolme omaniku vahel võivad esemed olla jaotatud kuuel eri viisil:

B	G	K
a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

Rohkem võimalusi ei ole, meie tabel ammendab süstemaatiliselt kõik kombinatsioonid.

Vaatame nüüd, kuidas need jäägid vastavad nendele kuuele juhule

B	G	K	Võetud pähklite arv	Kokku	Jääk
a	b	c	$1+1=2$; $2+4=6$; $3+12=15$	23	1
a	c	b	$1+1=2$; $2+8=10$; $3+6=9$	21	3
b	a	c	$1+2=3$; $2+2=4$; $3+12=15$	22	2
b	c	a	$1+2=3$; $2+8=10$; $3+3=6$	19	5
c	a	b	$1+4=5$; $2+2=4$; $3+6=9$	18	6
c	b	a	$1+4=5$; $2+4=6$; $3+3=6$	17	7

Nagu näete, on järelejäänud pähklite hulk igal juhul erinev. Seepärast võite jääki teades kergesti tuvastada, kuidas asjad on teie sõprade vahel jaotatud. Väljute — nüüd juba kolmandat korda — toast ja vaatate taskuraamatust viimatitoodud tabelit (tegelikult on vaja vaid esimest ja viimast veergu); neid pähe õppida oleks raske ja seda pole vajagi. Tabelist näetegi, kes mis asja võttis. Kui taldrikul oli näiteks 5 pähklit, siis see (juht b, c, a) tähendab, et

võti on Brunol,
nuga Georgil,
pliiats Konstantinil.

Triki õnnestumiseks peate kindlasti mees pidama, mitu pähklit igale sõbrale andsite (seepärast andke pähkleid ikka tähestiku järjekorras, nagu oli tehtud meie näites).

Matemaatika mängudes

Doomino

16. Ahel 28 kivist. Miks 28 doominokivi võib laduda mängureegleid jälgides üheks suletud ahelaks?

17. Ahela algus ja lõpp. 28 doominokivi on laotud ahelaks, mille ühes otsas on 5 silma. Mitu silma on ahela teises otsas?

18. Doominotrikk. Teie kaaslane võtab ühe doominokivi ja teeb ettepaneku laduda ülejäänud 27 kivist lahtine ahel, kinnitades, et see on võimalik sõltumata sellest, millise kivi ta võttis. Seejärel läheb ta kõrvaltuppa, et mitte näha teie ahelat.

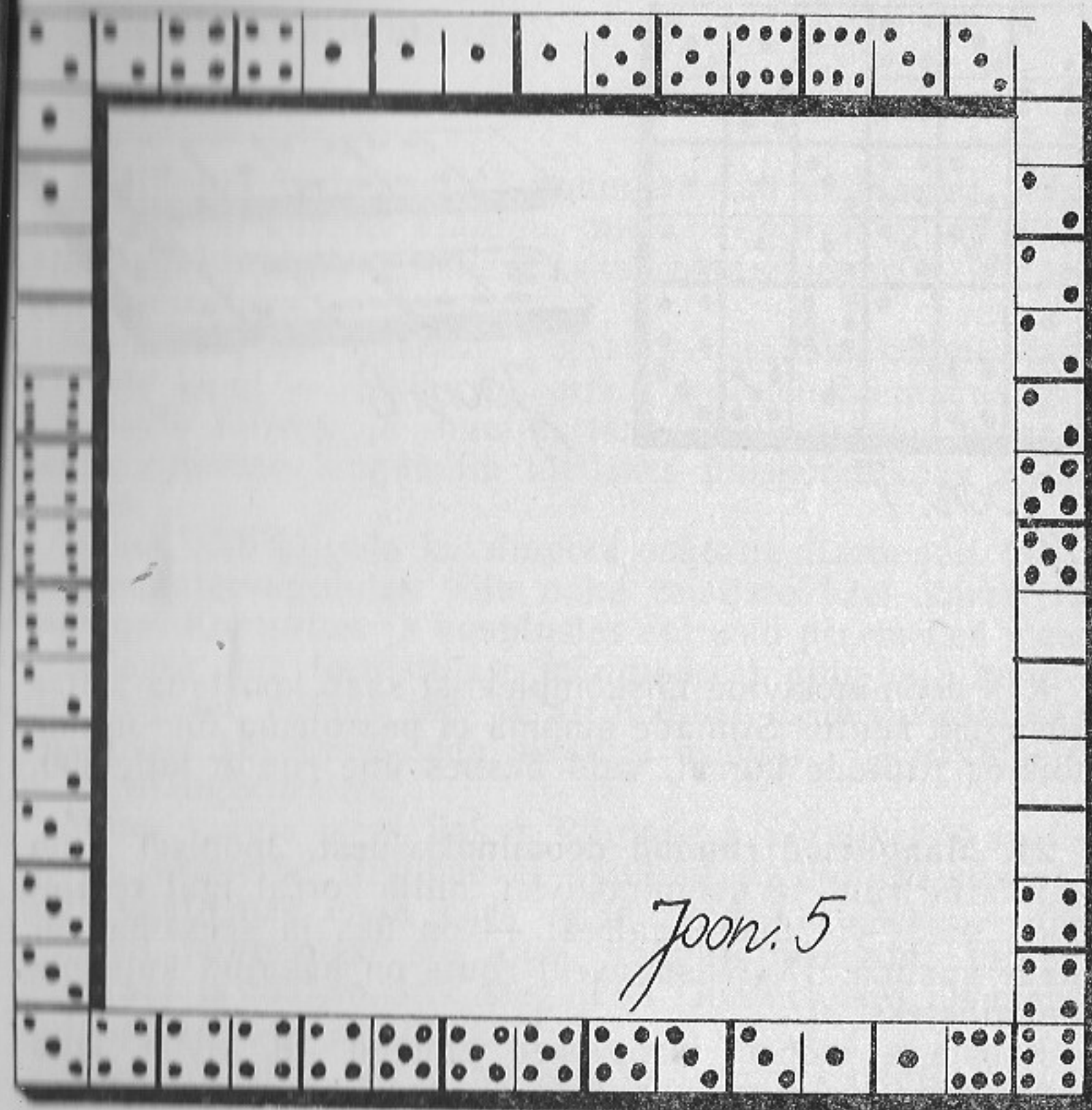
Te asute ahelat koostama ja leiате, et kaaslasel oli õigus: 27 kivi moodustavadki ühe ahela. Veel imestate selle üle, et kaaslane, kes viibib kõrvaltoas ega näe ahelat, teatab sealt, mitu silma on ahela kummaski otsas.

Kuidas ta sai seda teada? Ja miks on ta kindel, et 27 kivist saab moodustada ahela?

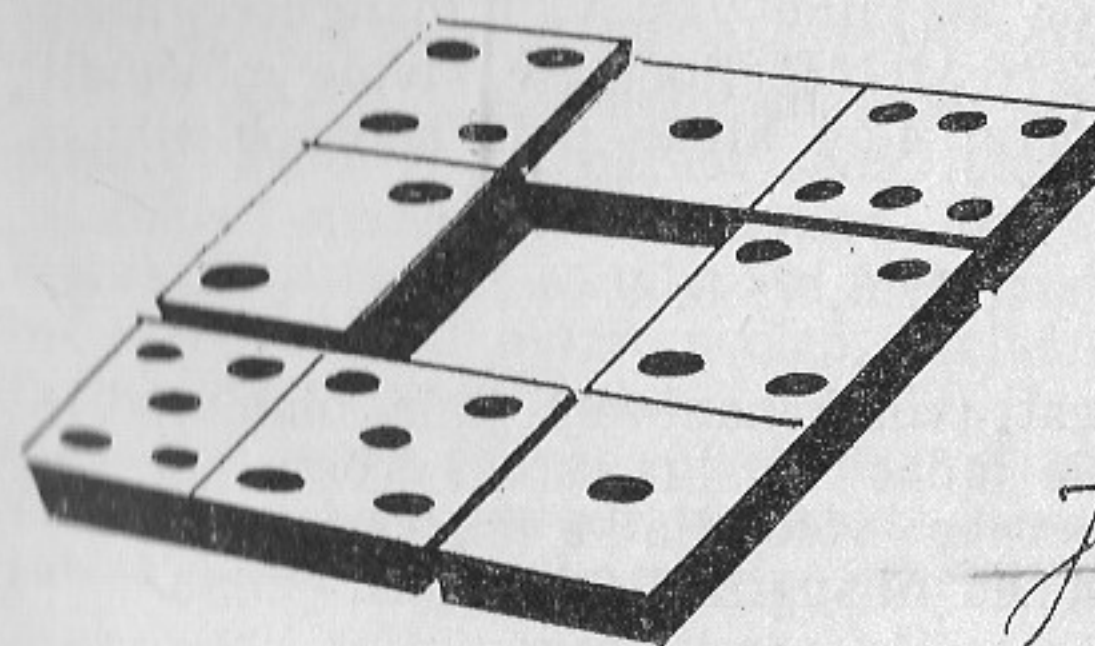
19. Raam. Joonis 5 kujutab ruudukujulist raami, mis on laotud doominokividest mängureeglite kohaselt. Raami servad on võrdsed pikkuselt, kuid mitte silmade arvu poolest: ülemisel ja vasakul serval on mõlemal 44 silma, ülejäänud kahel vastavalt 59 ja 32 silma.

Kas oskate teha sellist ruudukujulist raami, mille kõikidel servadel on võrdselt 44 silma?

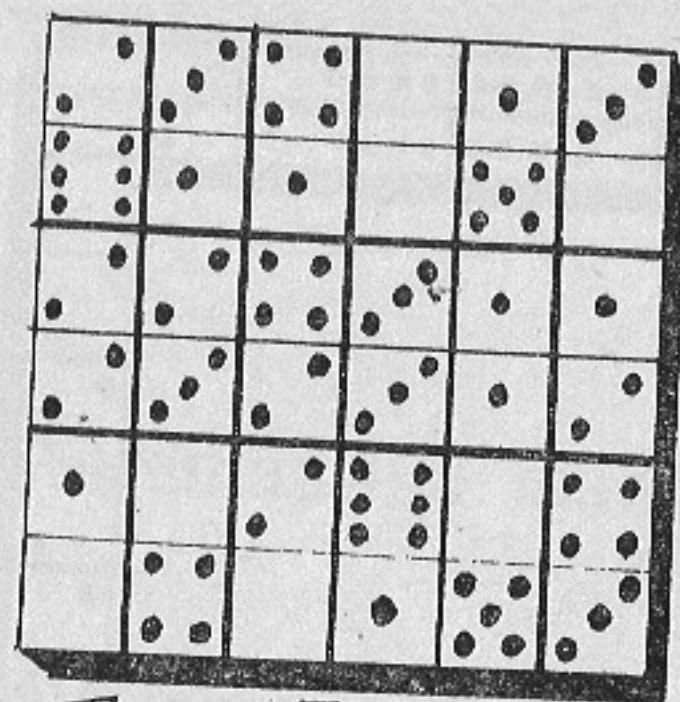
20. Seitse ruutu. Võib valida neli doominokivi, nii et nendest koostatud ruudul oleks igal küljel ühesugune arv silmi (näide on kujutatud joon. 6: liites silmad igal küljel, saate 11).



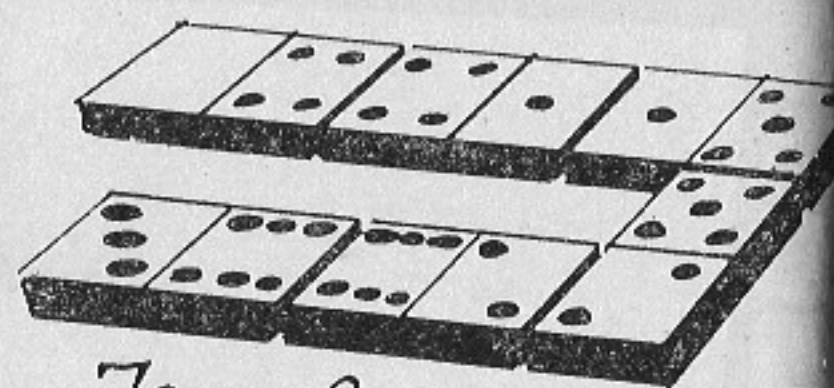
Joon. 5



Joon. 6



Joon. 7



Joon. 8

Kas doominokivide täiskomplektist saab koostada seitse niisugust ruutu? Silmade summa ei pea olema ühesugune kõikide ruutude korral, vaid üksnes ühe ruudu külgedel.

21. Maagilised ruudud doominokividest. Joonisel 7 on kujutatud ruut 18 doominokivist, mille korral igal real — piki-, püst- või diagonaalreal — on üks ja seesama silmade summa: 13. Niisuguseid ruute on hakatud kutsuma maagilisteks.

Koostage mõned maagilised ruudud 18 kivist, kuid teistsuguse rea summaga. 18 kivi korral on vähim võimalik küljesumma 13 ja suurim 23.

22. Aritmeetiline jada doominokividest. Joonisel 8 näete 6 kivi, mis on asetatud vastavalt mängureeglitele nõnda, et silmade arv kivil (loetakse kivide mõlemalt poolt) kasvab 1 võrra: 4-ga algav jada koosneb silmadest

4; 5; 6; 7; 8; 9.

Niisugust kasvavat (või kahanevat) jada nimetatakse aritmeetiliseks. Meie jadas on iga arv 1 võrra suurem eelmisest, kuid see «vahe» võib olla ka teistsugune.

Koostage veel mõned niisugused 6-kivilised jadad.

Viieteistkümnemäng

Oldtuntud karbikesel 15 nummerdatud nelinurkse mängukiviga on huvitav ajalugu, mida paljud mängijad ei tea aimatagi. Jutustame sellest saksa mängudeuurija W. Ahrensi sõnadega:

«Ümber pool sajandit tagasi — seitsmekümnen-date aastate lõpul — tekib Ameerikas «viieteistkümnemäng»; see levib kiiresti ja muutub tänu loendamatu hulgale tema küttesse langenuile tõeliseks ühiskondlikuks nuhtluseks.

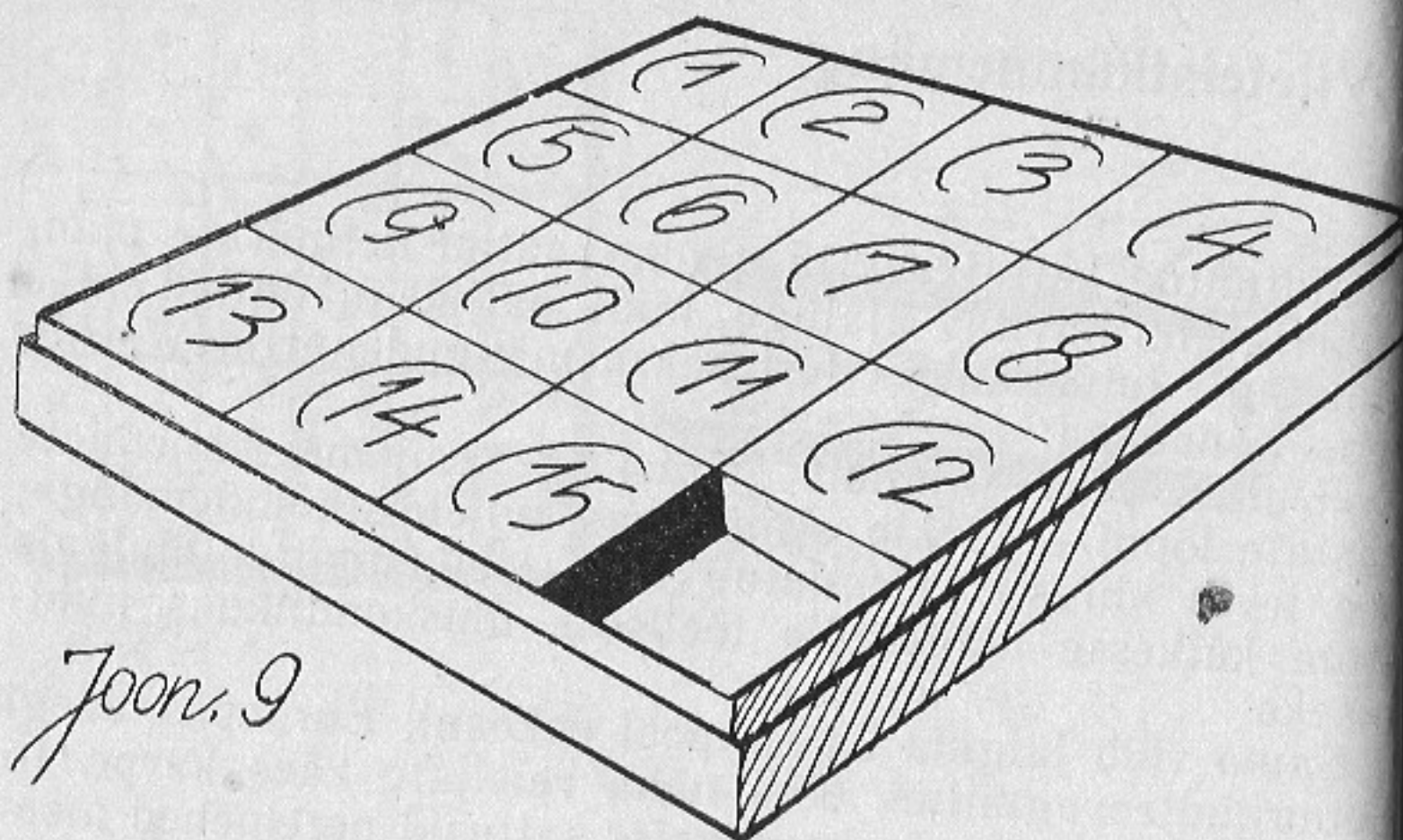
Sagis võib jälgida ka siinpool ookeani, Euroopas. Isegi hoburaudteevagunites võib näha reisijate käes karpe 15 nupuga. Kontorites ja kauplustes sattusid peremehed meeleheltesse oma teenistujate mängukirest ning olid sunnitud keelama mängu töö- ja äritundidel. Lõbustusasutuste omanikud kasutasid seda maaniat osavalt ja korraldasid suuri mänguturniire.

Mäng tungis isegi Saksa Riigipäeva pidulikesse saalidesse. «Mäletan Riigipäeval hallipäiseid inimesi süvenenult vaatlemas enda käes nelinurkset karbikest — nii selgesti, nagu oleks see alles praegu,» meenutab tuntud geograaf ja matemaatik Siegmund Günther, kes oli mängutaudi aastatel saadikuks.

«Pariisis leidis see mäng endale asupaiga lahtise taeva all, puisteedel, ja levis pealinnast kiiresti kõikidesse provintsidesse. Polnud niisugust üksildast maamaja, kus poleks pesitsenud see ämblik, varitsedes ohvrit, ega inimest, kes poleks olnud valmis laskma end mässida tema võrkudesse,» kirjutas üks prantsuse autor.

1880. aastal jõudis mängupalavik nähtavasti oma haripunkti. Kuid varsti pärast seda tõugati türann troonilt ja võideti matemaatika relvaga. Matemaatiline mänguteooria avastas, et esitatavate ülesannete suurest hulgast on lahendatavad ainult pooled, ülejäänud pole lahendatavad ühegi kavalusega.

Selgus, miks mõned ülesanded ei alistunud ka kõige visamatele pingutustele ja miks turniiride korraldajad julgesid pakkuda ülesannete lahendamise eest tohutuid preemiaid. Selles osas ületas kõiki mängu leiutaja ise, kes pakkus New Yorgi ajalehe väljaandele lahendamatu ülesande lahendamise eest 1000-dollarilise preemia; ja



Joon. 9

kui väljaandja kõhkles, oli leiutaja nõus maksma nimeetatud summa omaenese taskust. Leiutaja nimi oli Samuel (Sam) Lloyd. Ta sai kuulsaks teravmeelsete nuputamis-ülesannete koostajana. On huvitav, et Ameerikas ei õnnestunud tal oma mängu patenteerida. Eeskirjade kohaselt pidi ta esitama proovipartii soovitamiseks mängu «Töötava mudeli». Ta esitaski patendibüroo ametnikule ülesande, ja kui too küsis, kas see on lahendatav või mitte, oli leiutaja sunnitud vastama: «Ei, see on matemaatiliselt võimatu.»

«Sel juhul,» järgnes vastus, «pole võimalik ka töötav mudel, aga töötava mudelita ei saa patenti.» Lloyd leppis selle resolutsiooniga — kuid arvatavasti polnuks ta nii järeleandlik, kui oleks suutnud ette näha oma leiutise ennekuulmatut edu.*

Toome ära mängu leiutaja isikliku jutustuse mängu ajaloo mõningatest faktidest. «Ilmselt mäletavad paljud,» kirjutab Lloyd, «kuidas ma seitsmekümnendate aastate algul panin terve maailma pead murdma viieteistkümne liikuva kiviga karbi kallal, mis sai tuntuks viie-

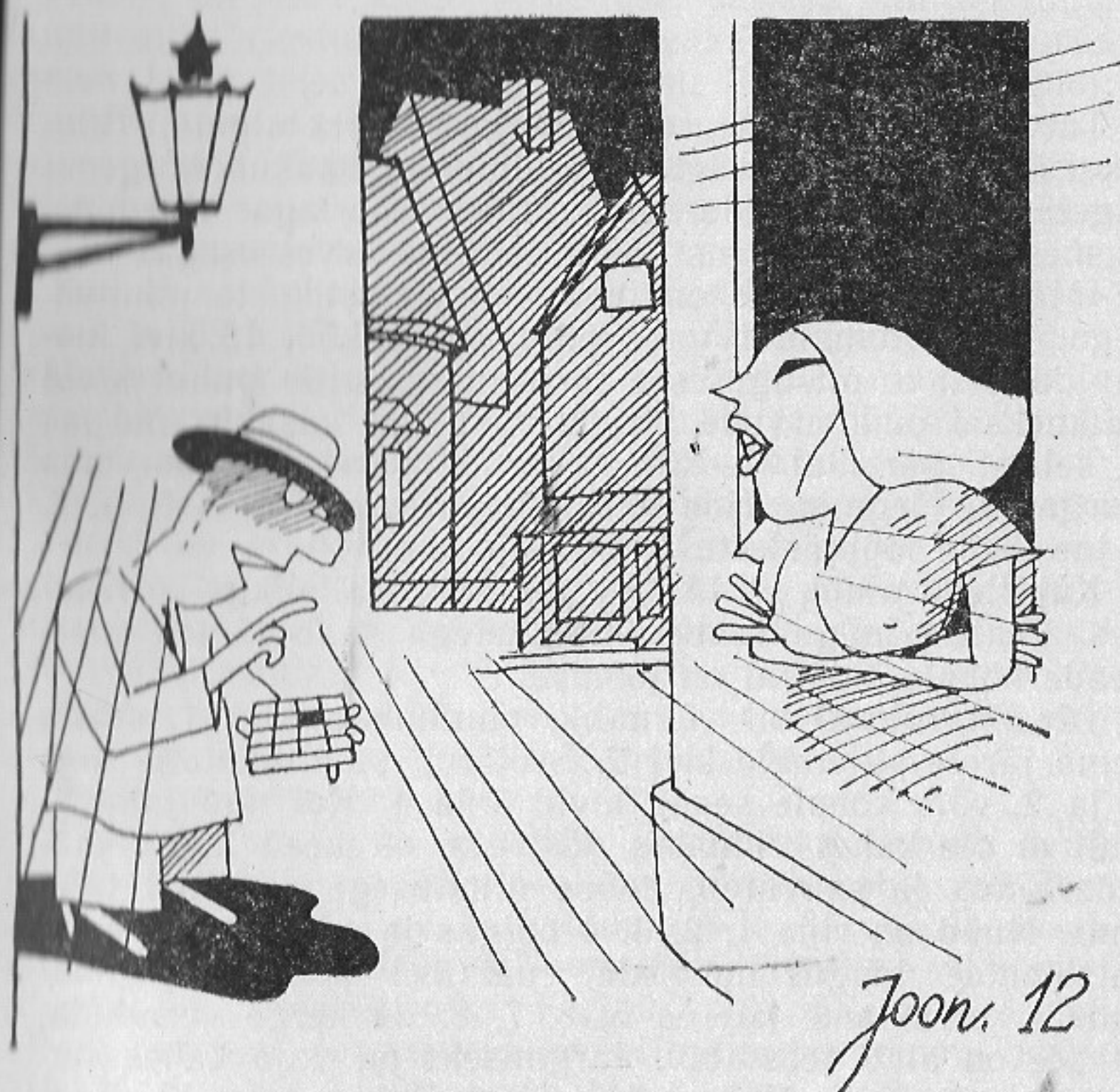
* Seda episoodi kasutas Mark Twain oma raamatus «Ameerika troonipärija».

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Joon. 10

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

Joon. 11



Joon. 12

teistkümnmänguna (joon. 10). Viisteist kivi oli paigutatud ruudukujulisse karpi järjekorras, peale 14. ja 15. kivi, mis olid ümber vahetatud, nagu näidatud juuresoleval illustratsioonil (joon. 11). Ülesandeks oli nihutada kivid üksteise järel õiges järjekorda, nii et oleks õige ka kivide 14 ja 15 järjekord.

Selle ülesande esimese õige lahenduse eest pakutud 1000-dollarilist preemiat ei pälvinud keegi, kuigi kõik lahendasid ülesannet väsimatult. Jutustati huvitavaid lugusid kaupmeestest, kes unustasid mängu pärast avada oma poed, auväärsetest ametnikest, kes seisid ööd läbi tänavalaternate all, otsides lahendust. Keegi ei tahtnud üritamisest loobuda, sest kõik olid kindlad neid ootavas edus. Räägitakse, et tüürimehed ajasid mängu pärast laevad karile, rongijuhid kihutasid jaamadest mööda; farmerid hülgasid oma adrad.»

* * *

Tutvustame lugejale selle mängu teooria algeid. Täielikul kujul on see väga keeruline ja haakub kõrgema algebra ühe haru, determinantide teooriaga. Piirdume üksnes mõne W. Ahrensi poolt esitatud arvestusega.

«Mängu ülesandeks on tavaliselt järjestikuste nihutustega, mida võimaldab vaba pind, seada kõik 15 kivi loomulikku, s. o. niisugusesse järjestusse, mille puhul kivid paikneksid oma arvude järjekorras: ülal vasakus nurgas 1, sellest paremal 2, siis 3, nende järel ülal paremas nurgas 4; järgmine rida vasakult paremale oleks 5, 6, 7, 8 jne. Seda lõppjärjestust näeme joonisel 10.

Kujutlege nüüd, et 15 kivi paiknevad täielikus korratuses. Teatud hulga ümberpaigutustega saab kivi 1 alati seada kohale, mis tal on joonisel.

Täpselt samuti on võimalik, puutumata kivi 1, seada tema järele paremale kivi 2. Seejärel, puudutamata kive 1 ja 2, võib kohale seada kivid 3 ja 4. Kui nad juhuslikult ei ole kahes viimases püstreas, on need kerge juhtida sinna ja saavutada mõne nihutusega soovitud tulemus. Nüüd on rida 1, 2, 3, 4 paigas ja edasiste manipulatsioonide käigus me seda enam ei puuduta. Samamoodi korrastame ka rea 5, 6, 7, 8; on kerge veenduda, et see on alati teostatav. Järgmiseks on vaja kahel alumisel real seada õiges järjekorda kivid 9 ja 13. Edasiste nihutuste käigus kive 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ja 13

enam ei puudutata; jääb üle korrastada väike pind kuue väljaga, millest üks on vaba ja ülejäänud viiel asuvad suvalises järjekorras kivid 10, 11, 12, 14, 15. Selle kuueväljalise pinna piires võib alati õigesse järjekorda seada kivid 10, 11, 12. Kui see on tehtud, siis on viimases reas kivid 14 ja 15 kas õiges või vales järjekorras (joon. 11). Sel teel, mida lugejad võivad kergesti kontrollida tegevlikuses, jõuame järgmisele tulemusele.

Iga algseisu võib viia kas joonisel 10 (seis I) või joonisel 11 (seis II) kujutatud järjestusse.

Kui mingit algseisu, mida lühiduse mõttes tähistame S-ga, on võimalik muuta järjestuseks I, siis on võimalik ka vastupidine: muuta seis I seisuks S. Sest kõik kivide käigud on pöörduvad: kui näiteks seisus I viia vabale väljale kivi 12, siis võime selle käigu kohe tagasi võtta, nihutades kivi tagasi.

Niisiis on meil kaks järjestuse seeriat, millest ühte kuuluvaid järjestusi saab ümber seada õigesse järjekorda (seisu I) ja teise seeria omi seisu II. Ning vastupidi: õigest järjestusest võib ümber paigutada suvalisse esimesse seeria järjestusse, ja järjestusest II igasugusesse teise seeria seisu. Lõpuks on võimalik iga kaht ühte seeria järjestust muuta teineteiseks.

Kas ei saaks minna edasi ja ühendada omavahel seisud I ja II? Võib rangelt tõestada (üksikasjadesse ärgem laskugem), et neid seise ei saa teineteiseks muuta mingi arvu käikudega. Seepärast jaguneb terve määratu kivide järjestusvõimaluste hulk kaheks ühitamatuks seeriaks: 1) järjestused, mida on võimalik teisaldada loomulikku seisu I, need on lahenduvad, 2) järjestused, mida võib viia seisu II ning mis pole mingil tingimusel seatavad loomulikku seisu: need on seisud, mille lahenduste eest pakuti tohutuid preemiaid.

Kuidas saada teada, kas antud järjestus kuulub esimesse või teise seeriasse? Selgitame seda näitega.

Vaatleme niisugust seis:

Esimese rea kivid on õiges järjekorras, samuti teise omad peale viimase (9). See kivi hõivab koha, mis loomulikus järjestuses peaks kuuluma 8-le. Järelikult seisab kivi 9 kivi 8 ees: niisugust loomuliku järjestuse rikkumist nimetatakse inversiooniks. Kivi 9 kohta ütleme: siin on üks inversioon. Järgnevaid kive silmitsedes leiame, et ka kivi 14 ennetab 3 võrra oma õiget kohta, paiknedes eespool kui 12, 13, 11, siin saame 3 inversiooni (14 on 12

	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

Joon. 13

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

Joon. 14

ees; 14 on 13 ees; 14 on 11 ees). Kokku on juba $1+3=4$ inversiooni. Edasi, kivi 12 paikneb 11-ne ees, ka 13 11-nest eespool. Saame veel kaks inversiooni. Kokku tuleb 6 inversiooni. Nõnda tehakse kindlaks inversioonide arv igas paigutuses, vabastanud eelnevalt viimase välja paremas alumises nurgas. Kui inversioonide arv on paarisarv nagu vaadeldud juhul, on antud seis teisendatav loomulikuks, s. o. ta on lahenduv. Aga kui inversioonide arv on paaritu arv, kuulub järjestus teise seeriasse ega ole lahenduv (null loetakse paarisarvuks).

• Tänu matemaatika poolt sellesse mängu toodud selgusele on endisaegne mängukirg meile kujutlematu. Matemaatika lõi mänguteooria, mis andis kõikidele küsimustele ammendava vastuse ega jätnud ühtki segast punkti. Mängu tulemus ei sõltu juhusest või leidlikkusest nagu teiste mängude korral, vaid puhtmatemaatilistest teguritest, mis määravad selle ette absoluutse kindlusega.»

Esitame nüüd mõned selle mängu leiutaja poolt koostatud lahenduvad ülesanded:

23. Lloyd'i esimene ülesanne. Lähtudes joonisel 11 kujutatud seisust, nihutada kivid õigesse järjestusse, kuid vaba väljaga ülemises vasakus nurgas. (joon. 13).

24. Lloyd'i teine ülesanne. Lähtudes paigutusest joonisel 11, keerake karpi veerand pööret ja nihutage kive, kuni saate joonisel 14 näidatud seisu.

25. Lloyd'i kolmas ülesanne. Nihutades kive vastavalt mängureeglitele, muutke karp maagiliseks ruuduks, nii et arvude summa oleks igas suunas 30.

Krocket

Lahendades ülesandeid doominost ja viieteistkümnemängust, jääme aritmeetika piiresse. Asudes lahendama keerdülesandeid krocketist, siirdume geomeetria valda.

Viis järgmist ülesannet on krocketimängijaile.

26. Kas läbi värava või krokeerida? Krocketiväravad on ristkülikukujulised. Nad on palli läbimõõdust kaks korda laiemad. Mis on kergem, kas puhtalt, väravatraati riivamata läbida kõige soodsamast positsioonist värav või tabada samast kaugusest palli (s. o. krokeerida)?

27. Pall ja vai. Krocketivai on alt 6 cm lai. Palli läbimõõt on 10 cm. Mitu korda on kergem tabada palli kui samast kaugusest vaia?

28. Kas läbida värav või tabada vaia? Palli läbimõõt on kaks korda väiksem ristkülikukujulise värava laiuusest ja kaks korda suurem vaia läbimõõdust. Kas on kergem läbida puhtalt värav kõige soodsamast positsioonist või tabada samast kaugusest vaia?

29. Läbida «hiirelõks» või krokeerida? Ristkülikukujulise värava laius on kolm korda suurem palli läbimõõdust. Mis on kergem, kas läbida puhtalt kõige soodsamast positsioonist «hiirelõks» või krokeerida?

30. Läbipääsmatu «hiirelõks». Missugune peab olema ristkülikukujulise värava laiuuse ja palli läbimõõdu suhe, et «hiirelõksu» oleks võimatu läbida?

Nuputamisülesannete 16–30 vastused

16. Ülesande lihtsustamiseks ärme esialgu vaatleme paariskive: 0–0, 1–1, 2–2 jne. Järelejäänud 21 kivil kordub iga silmade arv 6 korda. Näiteks 4 silma (ühel kivi poolel) esineb järgmisel kuuel kivil:

4–0; 4–1; 4–2; 4–3; 4–5; 4–6.

Niisiis korduvad kõik silmade arvud paarisarv korda. On selge, et niisuguse komplekti kivid võib laduda üksteise järel, võrdse silmade arvuga pooled vastakuti. Kui see on tehtud ja 21 kivi laotud suletud ahelaks, asetame kivide ühenduskohtade 0—0, 1—1, 2—2 jne. vahele vastavad kõrvalepandud paariskivid. Seega on kõik 28 doominokivi mängureeglite kohaselt laotud üheks ahelaks.

17. On kerge näidata, et 28 doominokivist koosnev ahel peab lõppema sama silmade arvuga, millega algabki. Ja tõesti, kui nii ei oleks, korduks ahela otstes olev silmade arv paaritu arv korda (sest ahela sees esinevad silmade arvud paariviisi); aga me teame, et täielikus kivide komplektis kordub iga silmade arv kaheksa, s. o. paarisarv korda. Järelikult on meie oletus ebavõrdsest silmade arvust ahela otstes vale; silmade arv peab olema võrdne. (Niisuguseid arutlusi nimetatakse matemaatikas *reductio ad absurdum*.)

Muide, ahela äsjatõestatud omadusest saab teha huvitava järelduse: ahelat 28 doominokivist võib alati otstest sulgeda rõngaks. Doominokivide täiskomplekti võib vastavalt mängureeglitele alati laduda suletud ahelaks.

Lugejat võib huvitada küsimus, mitu eri võimalust on niisuguse suletud või lahtise ahela koostamiseks. Laskumata väsitava arvutamise üksikasjadesse, mainime üksnes, et see arv on üle 7 triljoni.

Täpne vastus on

7 959 229 931 520

(see arv on algteguritega

$2^{13} \times 3^8 \times 5 \times 7 \times 4231$).

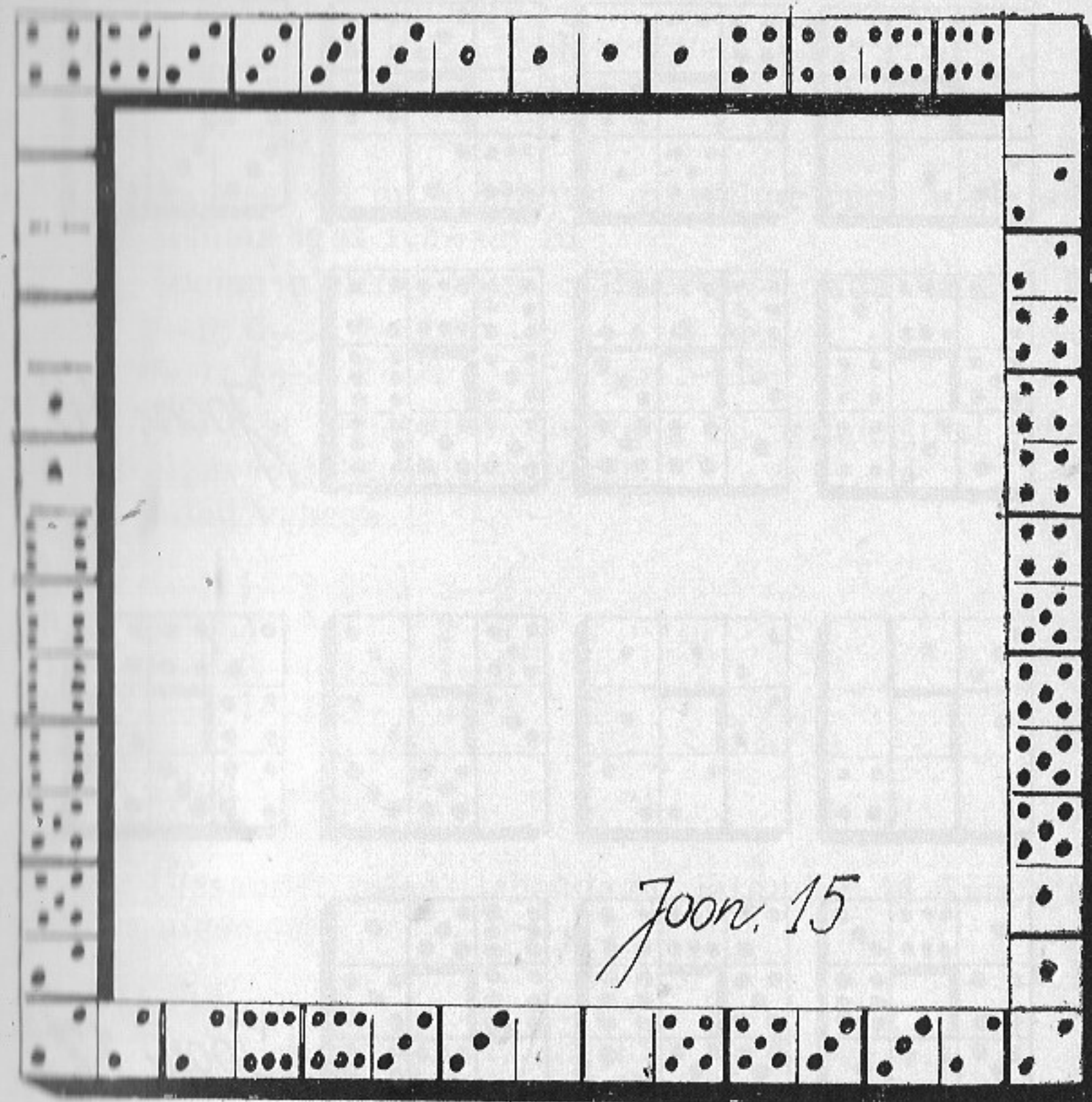
18. Selle ülesande lahendus järeldub otseselt eelmisest. Me teame, et 28 doominokivi võib alati laduda suletud ringiks; järelikult, kui võtta sellest ahelast üks kivi, siis:

1) moodustavad ülejäänud 27 kivi pideva ahela lahtiste otstega;

2) silmade arv selle ahela otstel on sama mis äravõetud kivil.

Peitnud eelnevalt ära ühe kivi, teame juba ette, missugune silmade arv tuleb ülejäänud kividest moodustatud ahela otstes.

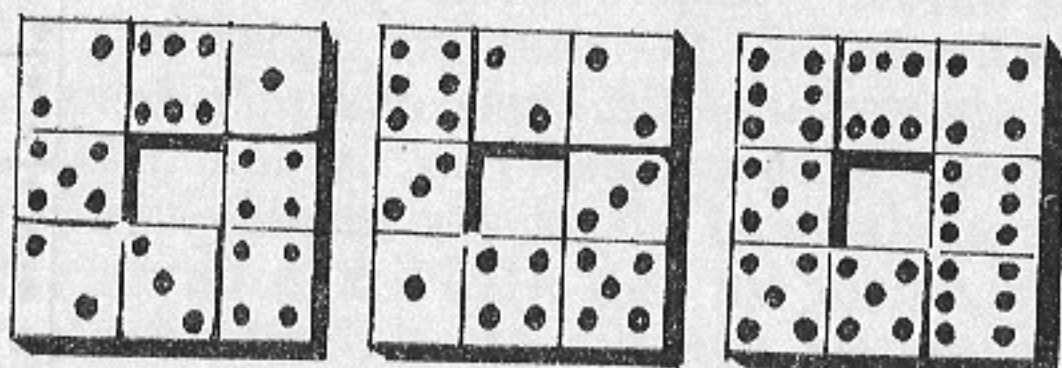
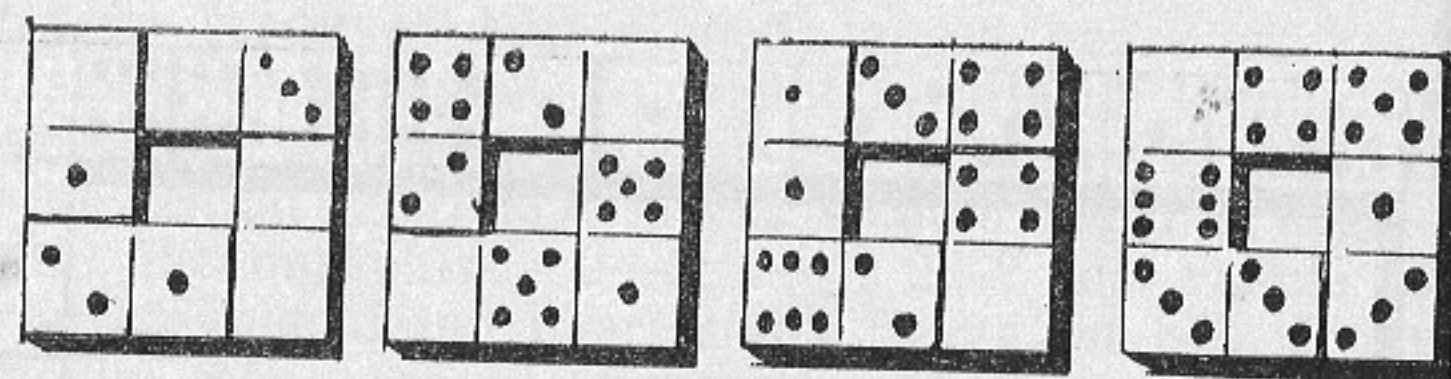
19. Otsitava ruudu kõigil külgedel olevate silmade summa on $44 \times 4 = 176$, s. o. 8 silma rohkem, kui on doominokivide täiskomplekti silmade summa. Vahe tuleb sel-



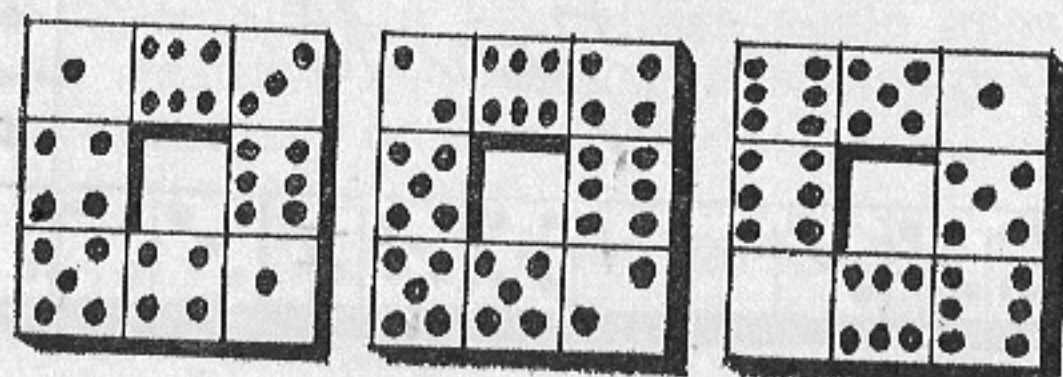
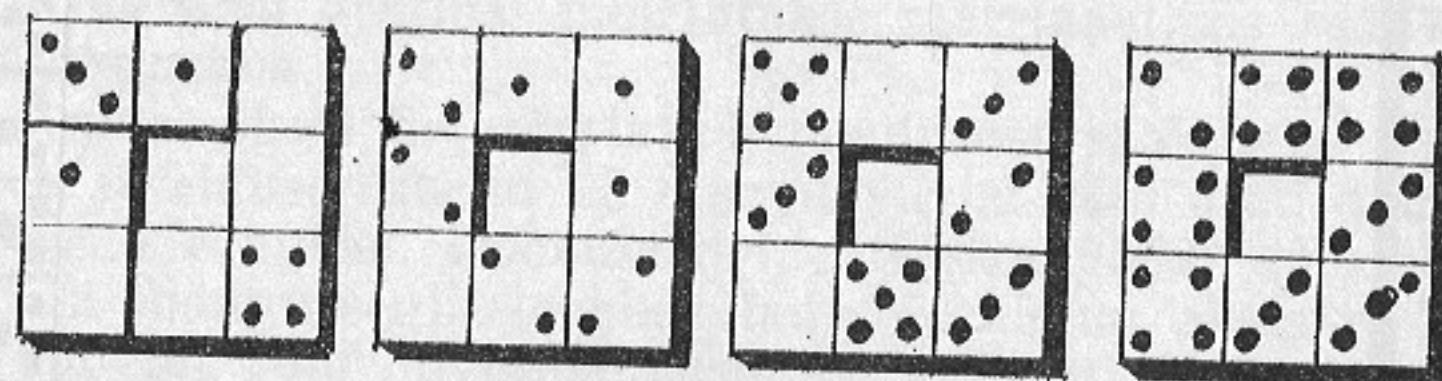
lest, et ruudu nurkades loetakse silmade arv kahekordselt. Ülaltooduga on ära määratud silmade summa ruudu nurkades — see on 8. See hõlbustab nõutava paigutuse leidmist mõneti, kuigi selle leidmine on ikkagi üsna tülikas. Lahendus on kujutatud joonisel 15.

20. Esitame ülesande paljudest lahendusvõimalustest kaks. Esimese lahenduse korral (joon. 16) on meil:

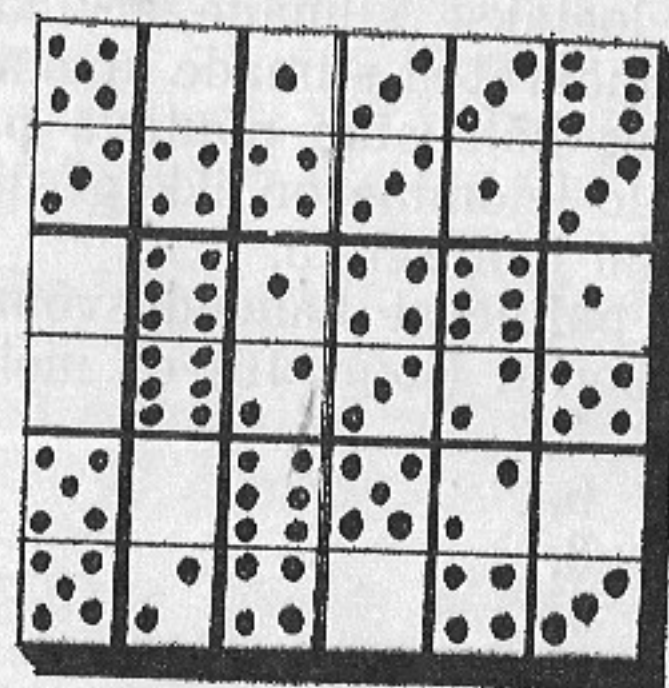
1 ruut silmade summaga	3,
1 „ „ „	6,
1 „ „ „	8,
2 ruutu „ „	9,
1 ruut „ „	10,
1 „ „ „	16.



Joon. 16



Joon. 17



Joon. 18

Teise lahenduse korral (joon. 17):

3	ruutu silmade summaga	4,
1	ruut	" " 8,
2	ruutu	" " 10,
1	"	" " 12.

21. Joonisel 18 on kujutatud maagiline ruut, mille silmade summa igas reas on 18.

22. Toome näiteks kaks aritmeetilist jada vahega 2:

a) 0—0; 0—2; 2—2; 2—4; 4—4; 4—6.

b) 0—1; 1—2; 2—3; 3—4; 4—5; 5—6.

Kõigist 6-st kivist võib koostada 23 aritmeetilist jada. Need algavad järgmiste kividega:

a) jadad vahega 1:

0—0 0—1 1—2 2—1 2—2
0—1 2—0 3—0 3—1 2—2
1—1 0—3 0—4 1—4 1—5
0—2 1—2 1—3 2—3 3—3

b) jadad vahega 2:

0—0; 0—2; 0—1.

23. Ülesannet saab lahendada järgmise 44 käiguga, alates algseisust:

14, 11, 12, 8, 7, 6, 10, 12, 8, 7,
4, 3, 6, 4, 7, 14, 11, 15, 13, 9,
12, 8, 4, 10, 8, 4, 14, 11, 15, 13,
9, 12, 4, 8, 5, 4, 8, 9, 13, 14,
10, 6, 2, 1.

24. Ülesanne lahendatakse 39 käiguga:

14, 15, 10, 6, 7, 11, 15, 10, 13, 9,
5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 10, 13,
9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12, 15, 14,
13, 9, 5, 1, 2, 3, 4, 8, 12.

25. Maagiline ruut silmade summaga 30 saadakse käikudega

12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15,
14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8,

4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6,
5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2, 1, 13,
14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3.

26. Tõenäoliselt arvab isegi kogenud mängija, et väravat läbida on kergem kui krokeerida: on ju värav pallist kaks korda laiem. Ent see kujutus on ekslik: värav on küll pallist laiem, kuid avaus, kust pall võib puhtalt läbi minna, on krokeerimismärklauast kaks korda kitsam.

Joonist 19 vaadeldes taipate öeldut. Selleks et pall ei riivaks väravat, peab tema keskpunkt mööduma väravatraadist vähemalt poole raadiuse kauguselt. Seega on värava läbimisel märklaua laius võrdne palli läbimõõduga.

Järgnevalt vaatame, kui lai on märklaud krokeerimisel. Ilmselt on tabamus kindel, kui krokeeriva palli keskpunkt ei möödu krokeeritava omast kaugemalt kui raadiuse võrra. Järelikult on märklaua laius sel juhul võrdne palli kahekordse diameetriga, nagu on näha jooniselt 20.

Niisiis, vastupidi mängijate arvamusele on vaadeldud juhul kaks korda lihtsam krokeerida kui läbida väravat.

27. Pärast ülaltoodut ei nõua see ülesanne pikka selgitust. Hõlpsasti näeme (joon. 21), et krokeerimisel on märklaua laius võrdne palli kahekordse diameetriga, s. o. 20 cm; vaia tabamisel on märklaua laius võrdne palli diameetri ja vaia laiuse summa, s. o. 16 cm-ga (joon. 22). Järelikult on

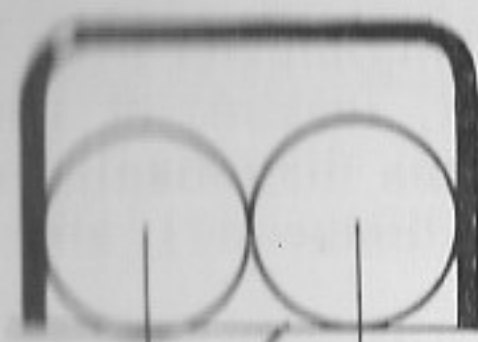
$$20 + 16 = 1 \frac{1}{4}$$

korda, s. o. 25% võrra lihtsam krokeerida kui tabada vaia. Tavaliselt peavad mängijad krokeerimise šansse tublisti suuremaks kui vaia tabamist.

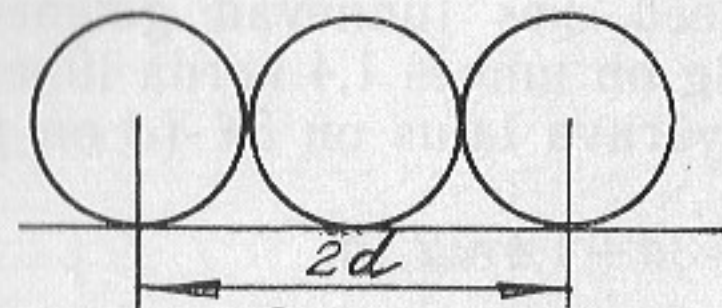
28. Mõni mängija arutleb nõnda: kui värav on pallist kaks korda laiem ja vai pallist kaks korda kitsam, siis on märklaud värava läbimisel neli korda laiem kui vaia tabamisel. Eelmistest ülesannetest õpetust saanud lugeja seda viga ei tee. Ta teab, et vaia tabamisel on märklaud $1 \frac{1}{2}$ korda suurem kui värava läbimisel.

(Kui väravad pole ristkülikukujulised, vaid kaarjad, on läbipääsutee veelgi kitsam, nagu kergesti võib veenduda, silmitsedes joonist 25.)

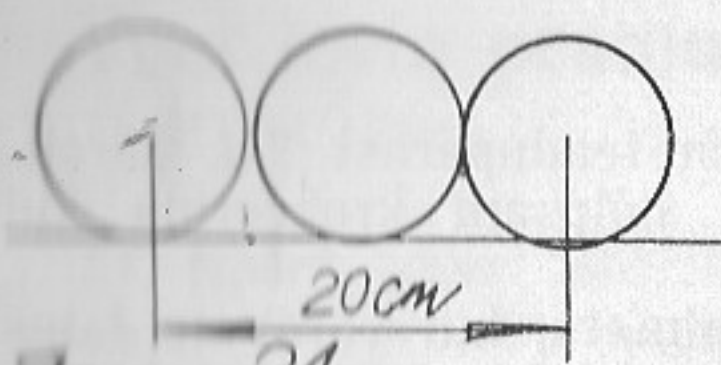
29. Joonistelt 26 ja 27 on näha, et vahemik a , mida



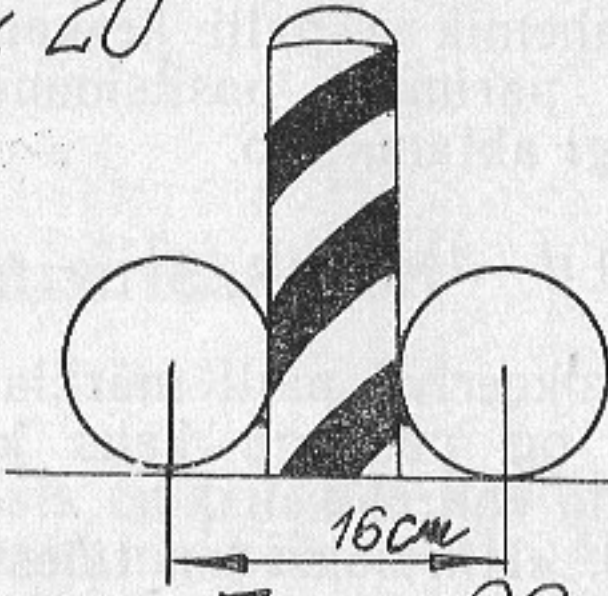
Joon. 19



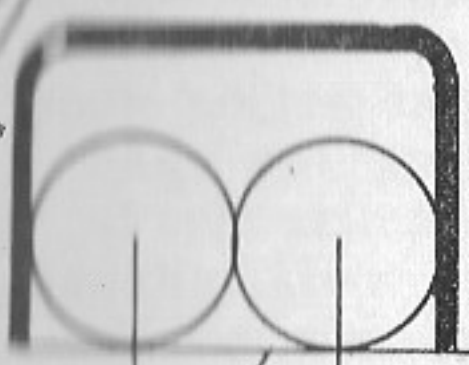
Joon. 20



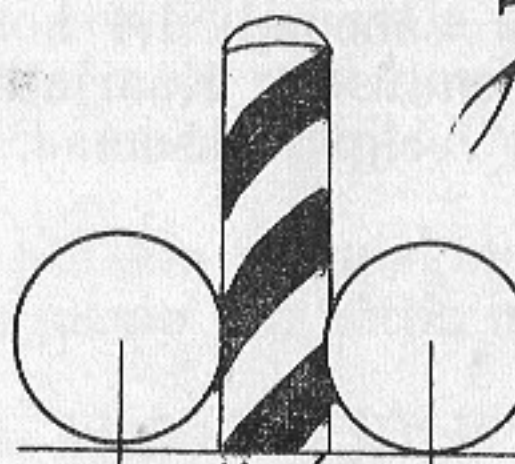
Joon. 21



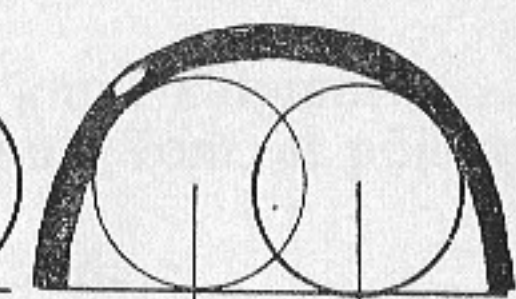
Joon. 22



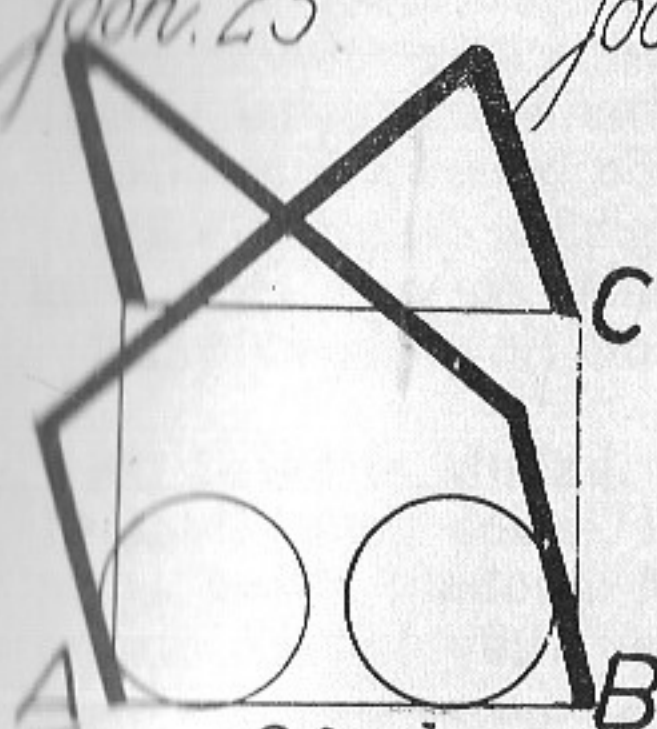
Joon. 23



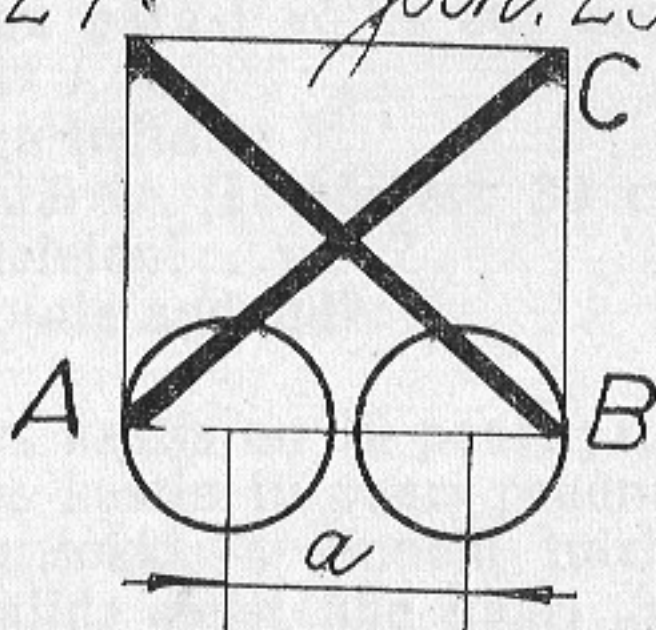
Joon. 24



Joon. 25



Joon. 26



Joon. 27

palli keskpaik võib läbida, on antud tingimustel üsna kitsas. Need, kes tunnevad geomeetriat, teavad, et ruudu AB külge on umbes 1,4 korda lühem tema diagonaalist AC . Kui värava laius on $3d$ (d on palli diameeter), siis

$$AB = 3d + 1,4 \approx 2,1d.$$

Vahemik a palli keskpunkti jaoks «hiirelõksu» läbimiseks parimast positsioonist on terve diameetri võrra veelgi ahtam, s. o.

$$2,1d - d = 1,1d.$$

Krokeeriva palli märklaud on teadupärast $2d$. Järelikult on peaaegu kaks korda hõlpsam krokeerida kui läbida «hiirelõksu».

30. «Hiirelõks» on täiesti läbimatu, kui väravate laius ei ületa palli oma vähemalt 1,4 korda. See nähtub eelmise ülesande lahendusest. Kaarjate väravate korral on läbimisvõimalused veelgi väiksemad.

KOLMAS PEATÜKK

Veel tosin peamurdmisülesannet

31. Nöör*. «Veel nööri?» küsis ema, tõstes käed pesunõust. «Võib arvata, nagu oleksin ma nöörivabrik. Muudkui anna nööri. Eile andsin ju sulle terve kera. Milleks sulle selline kogus? Kuhu sa selle panid?»

«Kuhu ma panin?» vastas poiss. «Esiteks võtsid ise poole nõörist tagasi...»

«Aga millega ma peaksin pesupakid kinni siduma?»

«Poole sellest, mis järele jäi, võttis mult Tom, et püüda kanalis kala.»

«Vanemale vennale tuleb ikka järele anda.»

«Seda ma ju teingi. Järele jäi õige vähe, ja sellestki võttis isa poole trakside paranduseks, mis katkesid naermisel autoõnnetuse üle. Aga pärast võttis õde veel kaks viitendikku juuste sidumiseks...»

«Mis sa ülejäänud nööriga tegid?»

«Järelejäanud nööriga? Järele jäi kõigest 30 cm pikune jupp. Eks tee sellest telefoni...»

Kui pika nööri oli ema pojale andnud?

32. Sokid ja kindad. Ühes kastis on 10 paari pruune ja 10 paari musti sokke, teises kastis 10 paari pruune ja 10 paari musti kindaid. Mitu sokki ja kinnast tuleb kummastki kastist võtta, et valida neist ühe paari (ükskõik kumba värvi) sokke ja ühe paari kindaid?

33. Juuksekarva iga. Kui palju on inimesel keskmiselt

* See ülesanne pärineb inglise kirjanikult Barry Paine'ilt.

juuksekarvu? On leitud, et neid on umbes 150 000*. Samu on tuvastatud, et kuus langeb inimesel peast keskmise 3000 juuksekarva.

Kuidas nende andmete järgi leida, kui kaua — mu dugi keskmiselt — püsib inimese peas juuksekarv?

34. Töötasu. Minu põhipalk ja ületunnitasu on kokku 130 rbl. Põhipalka on 100 rbl. rohkem kui ületunnitasu. Kui suur oleks minu töötasu ilma ületunnitasuta?

35. Suusasõit. Suusataja leidis, et läbides tunnis 10 km jõuab ta päralt tund aega pärast keskpäeva; kiiruse 15 km/h jõuaks ta sihtpunkti tund aega enne keskpäeva. Kui kiiresti peaks ta suusatama, jõudmaks kohale täpselt keskpäeval?

36. Kaks töolist. Kaks töolist, üks noor ja teine vana, elavad ühes korteris ja töötavad samas ettevõttes. Noor tööline jõuab kodust tööle 20 ja vana 30 minutiga. Mitme minuti pärast möödub noorem vanemast, kui too väljub majast 5 min. enne nooremat?

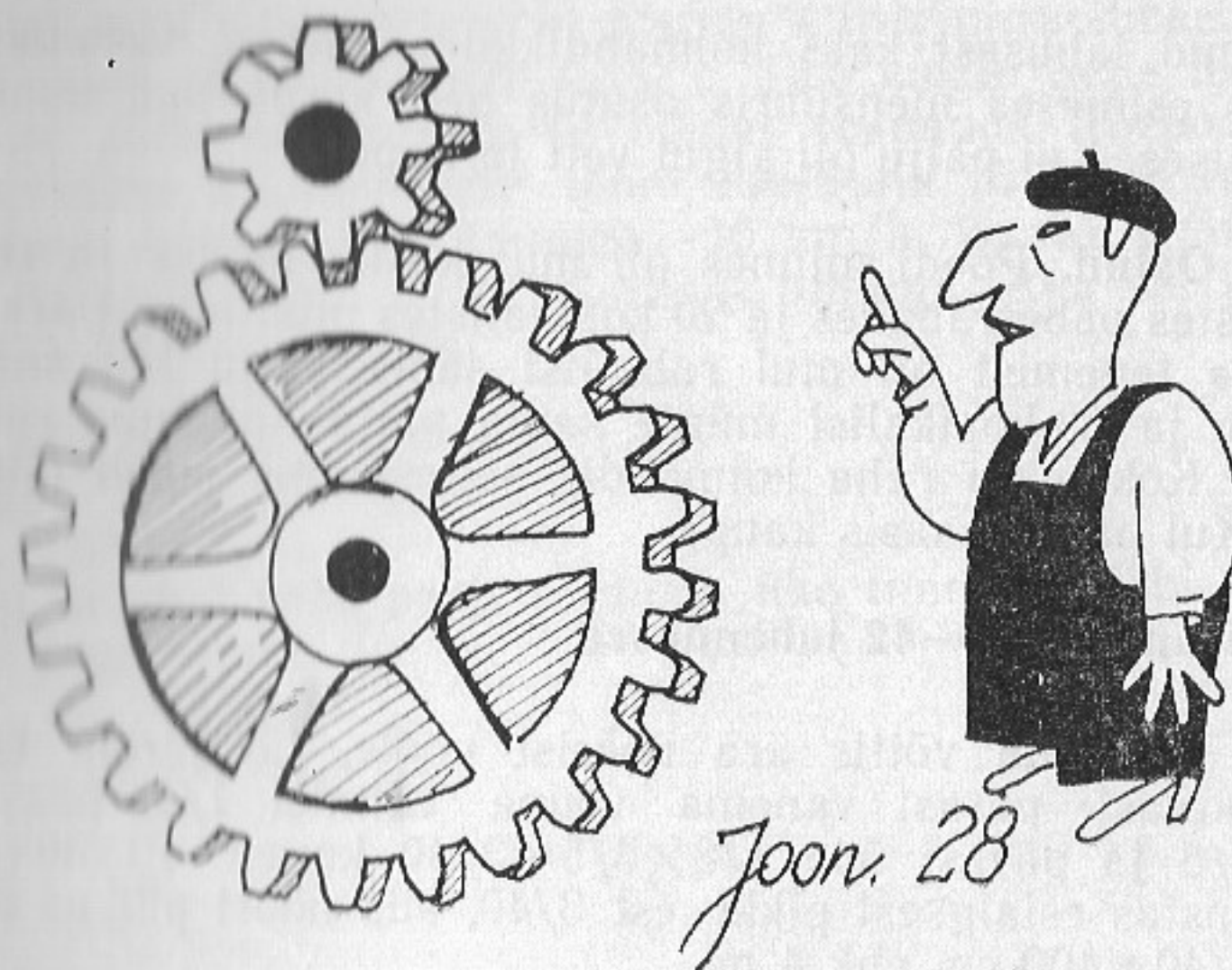
37. Ettekande ümberkirjutus. Ettekanne anti ümberlõõmiseks kahele masinakirjutajale. Kogenumal neist kulus selleks 2 tundi, teisel 3 tundi.

Kui kiiresti valmib töö, kui nad jagavad selle nii, et lõpetavad töö lühima ajaga?

Niisuguseid ülesandeid lahendatakse tavaliselt sarnaselt basseiniülesandega. Kõigepealt leitakse, missuguse osa tööst jõuaks tunniga valmis kumbki masinakirjutaja, liidetakse saadud arvud ning leitakse selle summa pöördväärtus. Mõelge välja, kuidas saab neid ülesandeid veel lahendada.

38. Kaks hammasratast. 8 hambaga võll on ühendatud 24-hambalise hammasrattaga (joon. 28). Suur ratas paneb võlli pöörlema.

* Paljusid üllatab, kuidas võidi seda teada: kas tõesti loeti juukseid ükshaaval üle? Seda pole tehtud; loetleti ainult juuksekarvad 1 cm² peanahal. Teades seda ja juustega kaetud peanaha pindala, saab kergesti leida juuksekarvade arvu. Lühidalt öeldes arvutasid anatoomid juuste arvu peas samal meetodil, nagu leiavad metsateadlased puude arvu metsas.



Mitu pööret teeb võll ajaga, mil hammasratas jõuab teha ühe täispöörde?

39. Kui vana? Peamurdmisülesannete armastajalt küsiti, kui vana ta on. Vastus oli mõtlemapanev:

«Võtke minu kolmekordne vanus kolme aasta pärast ja lahutage sellest minu kolmekordne vanus kolme aasta eest ning saategi vastuse oma küsimusele.»

Kui vana ta oli?

40. Ivanovide perekond. Kui vana on Ivanov?

«Eks arvutage välja. Kaheksateist aastat tagasi oli ta täpselt kolm korda vanem oma pojast. Tean seda täpselt, sest sel ajal oli rahvaloendus.»

«Kuid lubage, nagu ma tean, on ta praegu just kaks korda vanem pojast. Kas see on teine poeg?»

«Ei, seesama, tal on ainult üks poeg. Ja seepärast pole raske leida, kui vanad on praegu Ivanov ja ta poeg.»

Niisliis, lugeja, kui vanad nad on?

41. Lahuse valmistamine. Ühes mensuuris on veidi soolhapet, teises sama palju vett. Esimesest mensuurist valati teise 20 g hapet. Seejärel valati teises mensuuris

tekkinud lahusest kaks kolmandikku esimesse. Vedeliku kogus esimeses mensuuris osutus neli korda suuremaks kui teises. Kui palju oli algul vett ja hapet?

42. Ostud. Poodi minnes oli mul kokku umbes 15 rublastes paberrahades ja 20-kopikalistes müntides. Pärast ostude tegemist oli mul rublalisi sama palju kui enne münte ja 20-kopikalisi münte sama palju kui enne rublasid. Kokku oli raha kolmandik sellest, mis poodi minnes. Kui palju maksis kaup?

Ülesannete 31–42 lahendused

31. Kui ema võttis ära nõorist poole, jäi järele $1/2$ nõorikerast; pärast vanema venna võtmist $1/4$, pärast isa $1/8$ ja pärast õde $1/8 \times 3/5 = 3/40$ kerast. Et 30 cm moodustas esialgsest pikkusest $3/40$, siis nõori pikkus oli $30 : 3/40 = 400$ cm ehk 4 m.

32. Piisab kolmest sokist, sest kaks on neist niikuinii üht värvi. Kinnastega pole lugu nii lihtne, sest need erine üksteisest ainult värvi poolest — ühed on määratud vasakule, teised paremale käele. Siin piisab 21 kinnast. Kui võtta näiteks 20 kinnast, siis võivad nad olla kõik ühe käe omad (10 pruuni vasaku käe oma ja 10 musta vasaku käe oma).

33. Kõige hiljem langeb loomulikult välja juuksekarv, mis on äsja tärganud. Vaatame, millal jõuab kätte tema kord välja langeda. Esimesel kuul langevad 150 000-st olemasolevast juuksekarvast välja 3000, esimesel kahel kuul 6000, esimese aastaga — $12 \times 3000 = 36\,000$. Järelikult möödub üle nelja aasta, enne kui jõuab kätte viimase juuksekarva kord välja langeda. Nii leidsimegi, et inimese juuksekarva iga on veidi üle 4 aasta.

34. Paljud vastavad mõtlemata, et 100 rubl. See on väär: nõnda oleks ju põhipalk ületunnitasust suurem kõigest 70 rubl., aga mitte 100 rubl.

Ülesannet tuleb lahendada nõnda. Me teame, et põhipalga saame, lisades ületunnitasule 100 rubl. Seepärast peame 130 rubl-le liites 100 rubl. saama kahekordse põhipalga: $130 + 100 = 230$. Siit saame, et põhipalk on 115 rubl., ülejäänud 15 rubl. on ületunnitasu.

Kontrollime: põhipalk (115 rubl.) on ületunnitasust (15 rubl.) suurem 100 rubl. võrra, nagu nõutudki.

35. See ülesanne on huvitav kahes mõttes: esiteks võib

ja kergesti viia mõttele, et otsitav kiirus on aritmeetiline keskmine 10 ja 15 km/h-st, s. o. 12,5 km/h. Selle mõttegaipalkapidamatuses on hõlbus veenduda. Tõepoolest, teepikkuse a kilomeetrit läbib suusataja 15 km/h tunni-kiiruse juures, $a/15$ tunniga, 10 km/h korral $a/10$ ja $12\frac{1}{2}$ km/h puhul $a: 12\frac{1}{2} = 2a/25$ tunniga. Aga sel juhul peaks kehtima võrdus

$$\frac{2a}{25} - \frac{a}{15} = \frac{a}{10} - \frac{2a}{25},$$

sest kumbki vahe peab võrduma ühe tunniga. Läbi jagades a -ga saame

$$\frac{2}{25} - \frac{1}{15} = \frac{1}{10} - \frac{2}{25}$$

ehk

$$\frac{4}{25} = \frac{1}{15} + \frac{1}{10};$$

võrdus ei kehti:

$$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} = \frac{1}{6} = \frac{4}{24}, \text{ aga mitte } \frac{4}{25}.$$

Ülesande teine iseärasus on selles, et seda mitte üksnes ei saa lahendada võrrandideta, vaid ka üsna lihtsalt peast.

Arutleme nõnda: kui kiirusel 15 km/h kestaks sõit kaks tundi kauem (s. t. sama kaua kui kiirusel 10 km/h), läbiks suusataja 30 km rohkem kui tegelikult. Teatavasti läbib ta ühe tunniga 5 km rohkem, mistõttu sõit kestaks $30 : 5 = 6$ h. Järelikult oleks ta 15-km/h tunnikiirusega teel $6 - 2 = 4$ h. Siit selgub ka teepikkus: $15 \times 4 = 60$ km.

Nüüd on juba hõlbus leida, millise kiirusega jõuaks suusataja kohale täpselt keskpäeval, s. o. kui sõit kestaks 5 tundi:

$$60 : 5 = 12 \text{ km/h.}$$

Lihtne kontroll kinnitab tulemuse õigsust.

36. Ülesannet saab lahendada võrrandi abita ning üsna mitut moodi. Vaatleme neist kahte.

Esimene võimalus. 5 minutiga läbib noor tööline tee $1/4$, vanem $1/6$, s. o.

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

võrra vähem. Et vanemal töölisel on $1/6$ tee pikkuse ed maa, siis püüab noorem ta kinni

$$\frac{1}{6} : \frac{1}{12} = 2$$

viie minuti ajavahemiku järel, s. o. kümne minu pärast.

Teine võimalus on lihtsam. Tööleminekuks kuluta vanem tööline 10 minutit rohkem nooremast. Kui ta asub teele 10 minutit enne nooremat, jõuaksid nad koos kohale. Aga et ta väljub majast 5 minutit enne nooremat, siis möödub too talt poolel teel, s. o. 10 minuti pärast (kog tee läbimiseks kulub nooremal 20 minutit).

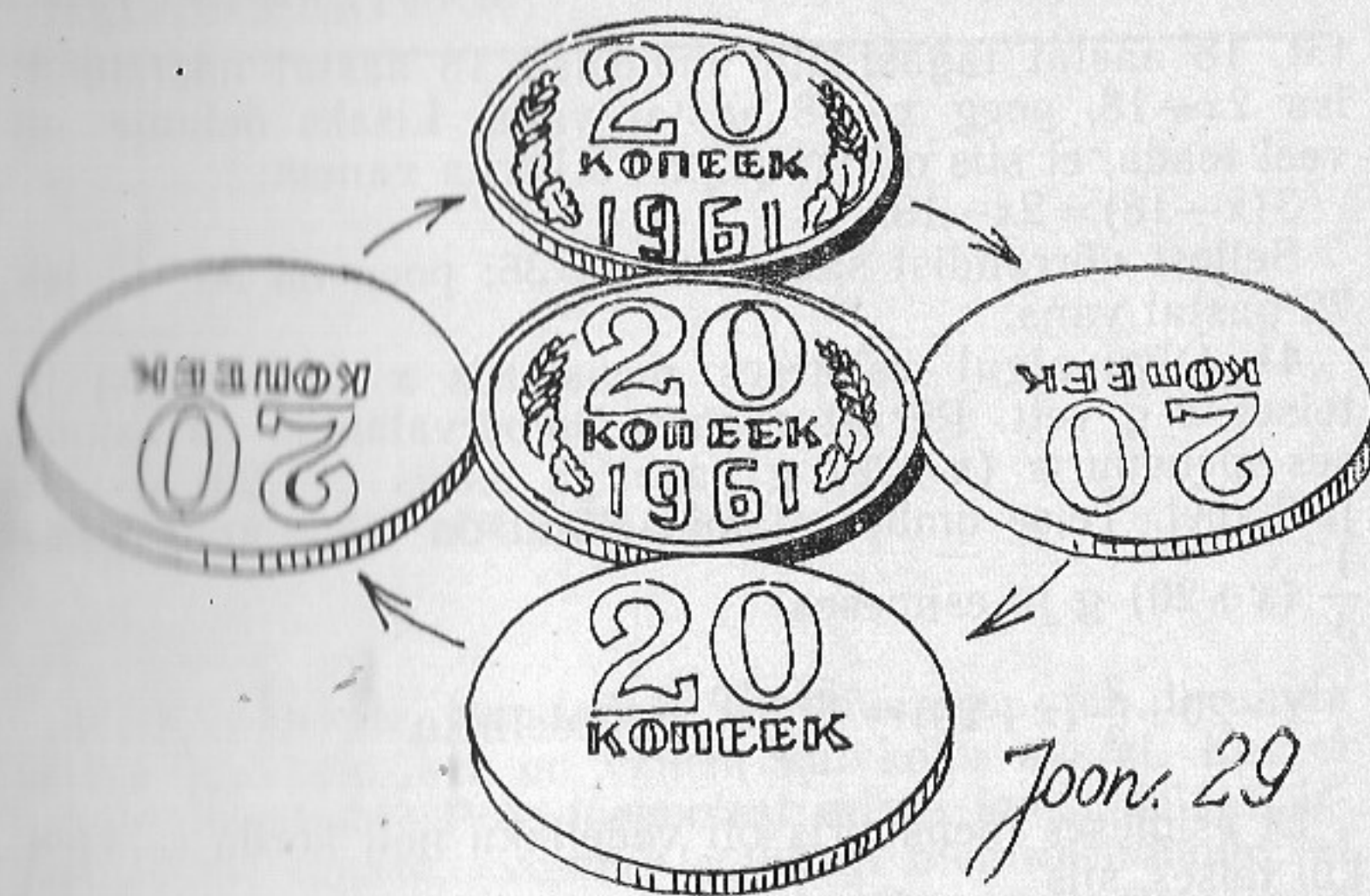
37. Mittestandardne lahendusviis on järgmine. Esitan küsimuse: kuidas peaksid masinakirjutajad jaotama oma vahel töö, et jõuda valmis korraga. (Ilmselt saabki töö valmis lühima ajaga sel juhul, kui kummalgi ei jää töös vaba aega.) Et kogenum masinakirjutaja töötab $1 \frac{1}{2}$ korda kiiremini, siis tuleb talle anda $1 \frac{1}{2}$ korda rohkem tööd kui ta vähem kogunud kolleegile. Nii lõpetavad mõlemad ühel ajal. Järelikult tuleb esimesele anda $\frac{3}{5}$ ja teisele $\frac{2}{5}$ ettekandest.

Sisuliselt ongi ülesanne lahendatud. Jääb veel ü leida, kui kaua aega võtab esimesel masinakirjutajal $\frac{3}{5}$ teksti ümbertippimine. Et ta teeb kogu töö 2 tunniga siis $\frac{3}{5}$ sellest $2 \times \frac{3}{5} = 1 \frac{1}{5}$ tunniga. Sama ajaga jõuab oma töö ümber lüüa ka teine masinakirjutaja. Niisiis kulub töö tegemiseks 1 tund ja 12 minutit.

Ülesannet võib lahendada ka teisiti. 6 tunniga võib esimene masinakirjutaja lüüa teksti ümber 3 korda ja teine 2 korda. Järelikult lööksid nad 6 tunniga teksti kahekesi ümber 5 korda. Ettekande teksti ümberlöömiseks kuluks neil aega 5 korda vähem, s. o. $6 \text{ h} : 5 = 1 \text{ h} 12 \text{ min}$.

38. Arvates, et võll teeb kolm pööret, te eksite: õige vastus on neli.

Miks? Selle mõistmiseks asetage enda ette paberilehekaks ühesugust münti, näiteks kahekümnekopikalised, nagu on kujutatud joonisel 29. Hoides alumist münti sõr



mega paigal, veeretage ülemist ümber selle. Endale üllatuseks märkate, et kui ülemine münt on teinud pool tiiru ümber teise ja asub selle all, on ta juba teinud täispöörde ümber oma telje: number on jälle õiget pidi. Sooritanud täistiiru ümber paigaloleva mündi, on ta teinud kaks pööret ümber oma telje.

Oldiselt ongi nii, et kui keha liigub pööreldes mööda ringjoont, teeb ta ühe tiiruga ühe pöörde arvatust rohkem. Sainul põhjusel ei tee Maa tähtede suhtes aastaga mitte 365 $\frac{1}{4}$, vaid 366 $\frac{1}{4}$ pööret ümber oma telje. Nüüd mõistate, miks täheööpäevad on lühemad päikeseööpäevadest.

39. Aritmeetiline lahendus on võrdlemisi keeruline, kuid algebraga lahendub ülesanne lihtsa võrrandiga. Tähistame otsitava vanuse x -ga. Vanus kolme aasta pärast on $x+3$ ja vanus kolme aasta eest on $x-3$. Saame võrrandi

$$3(x+3) - 3(x-3) = x,$$

millest $x=18$. Nii vana oligi nuputamisülesannete sõber.

40. See ülesanne lahendub lihtsa võrrandiga nagu eelminegi. Kui poja vanus on x , siis isa vanus on $2x$ aast

tat. 18 aastat tagasi olid mõlemad 18 aastat nooremad: isa $2x-18$, poeg $x-18$ aastat vana. Lisaks öeldule on veel teada, et siis oli isa pojast 3 korda vanem:

$$3(x-18)=2x-18.$$

Sellest võrrandist saame, et $x=36$: poeg on 36 ja isa 72 aastat vana.

41. Olgu algul esimeses mensuuris x g soolhapet ja teises x g vett. Pärast esimest ümbervalamist on esimeses mensuuris $(x-20)$ g hapet ja teises $(x+20)$ g vett ja hapet. Teise ümbervalamise järel on teises mensuuris $\frac{1}{3}(x+20)$ g ja esimeses

$$x-20+\frac{2}{3}(x+20)=\frac{5x-20}{3} \text{ g vedelikku.}$$

Et esimeses mensuuris oli vedelikku neli korda rohkem kui teises, siis

$$\frac{4}{3}(x+20)=\frac{5x-20}{3},$$

millest $x=100$. Kummaski mensuuris oli 100 g vedelikku.

42. Olgu esialgne rublaliste arv x ja 20-kopikaliste müntide arv y . Siis oli mul poodi minnes raha

$$100x+20y \text{ kopikat.}$$

Koju naastes oli mul

$$100y+20x \text{ kopikat.}$$

Teame, et teine summa oli esimesest kolm korda väiksem, järelikult:

$$3(100y+20x)=100x+20y.$$

Võrrandit lihtsustades saame:

$$x=7y.$$

Kui $y=1$, siis $x=7$; sel juhul oleks raha 7 rbl. 20 kop., mis ei klapi ülesande tingimustega (umbes 15 rubla).

Kui $y=2$, siis $x=14$. Esialgne rahasumma oleks 14 rbl. 40 kop., mis sobib hästi ülesande tingimustega.

Võttes $y=3$, saame raha liiga palju: 21 rbl. 60 kop.

Järelikult sobib ainsana vastuseks 14 rbl. 40 kop. Pärast ostmist jäi järele 2 rublalist ja 14 20-kopikalist, s. o. $200+280=480$ kop.; see on algsest summast tõesti kolmandik ($1440:3=480$).

Kulutati $1440-480=960$ kopikat. Järelikult maksid ostud 9 rbl. 60 kop.

Kas oskate loendada?

43. Kas oskate loendada? See küsimus võib tunduda solvav igaühele, kes on vanem kui kolm aastat. Kes ei oskaks loendada? Pole tõepoolest mingi kunst öelda järjest «üks», «kaks», «kolm». Ja ikkagi olen veendunud, et mitte alati ei saa te hakkama selle pealtnäha lihtsa asjaga. Kõik sõltub sellest, mida loendada. Pole raske üles lugeda naelu kastis. Aga kui kastis ei ole üksnes naelad, vaid need on segamini kruvidega, tuleb juba tuvastada, kui palju on kumbagi eraldi. Kuidas sel juhul toimida? Kas panna naelad ja kruvid eraldi hunnikusse ja lugeda seejärel üle?

Samasugune ülesanne seisab perenaise ees, kui ta peab pesu üle lugema enne pesemist. Kõigepealt sordib ta pesu: särgid ühte hunnikusse, käterätid teise, padjapüürid kolmandasse jne. Alles pärast seda väsitavat tegevust võib ta asuda loendama esemeid igas hunnikus.

Seda nimetataksegi oskamatuses loendada! Sest nõnda on eri esemeid üle lugeda kaunis ebamugav ja tülikas, kui mitte võimatu. On hea, kui teil tuleb loendada naelu või pesu, mida on hõlbus hunnikutesse jagada. Aga pange end metsniku olukorda, kes peab üle lugema, mitu mändi, kuuske, kaske ja haaba kasvab ühel hektaril. Siin ei saa enam puid eelnevalt liigiti hunnikutesse sortida. Kas loendate nüüd kõigepealt ainult männid ning seejärel kuused, kased ja haavad? Käite metsatüki neli korda üle?

Kas ei saaks teha seda lihtsamalt, piirdudes ainult ühe ringkäiguga? Saab küll, ja nii metsatöölised juba ammustest aegadest toimivadki. Selgitan selle sisu naelte ja kruvide näite põhjal.

Et lugeda korraga üle, kui palju on kastis naelu ja

kruvisid, ärge asuge neid jaotama eri hunnikutesse, vaid võtke pliiats ja joonestage paberile niisugune tabel:

Naelu Kruvisid

Siis hakake loendamä. Võtke kastist esimene kättejuhtuv ese. Kui see on nael, tõmmake kriips naelte lahtrisse ja kruvi kõrral kruvide lahtrisse. Võtke teine ese ja toimige samuti. Võtke kolmas jne., kuni kogu kast on tühi. Nüüd on teil naelte lahtris nii palju kriipse, kui palju oli kastis naelu, ja kruvide lahtris niipalju, kui palju oli kruvisid. Jääb üle ainult lugeda kriipsud kokku. Kriipsude loendamist saab kiirendada ja lihtsustada, tõmmates nad mitte üksteise kõrvale, vaid viiekaupa rühmadesse, nagu on näidatud joonisel 30.

Neid ruute on otstarbekas rühmitada paariti, s. t. alustada pärast 10 kriipsu uuest reast; kui ka teises reas on kümme joont, alustada kolmandat rida jne. Sel juhul paiknevad kriipsud joonisel 31 näidatud viisil.

Nõnda rühmitatud kriipse on hõlbus loendada: te näete kohe, et neid on kolm täit kümnet, üks viiene rühm ja veel kolm kriipsu, seega $30 + 5 + 3 = 38$.

Kriipse võib koondada ka teistsugustesse kujunditesse; näiteks kasutatakse tihti märke, kus ruut tähistab kümnet (joon. 32).

Puid metsalangil loendades toimite samuti, ainult te kannate paberilehele kahe lahtri asemel neli. Otstarbekamad on põik-, mitte püstlahtrid. Enne loendust näeb paberileht välja nii, nagu on kujutatud joonisel 33.

Loenduse lõppu kujutab joonis 34.

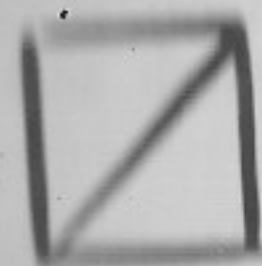
Nüüd on juba hõlbus teha kokkuvõtet:

mände	53	kaski	46
kuuski	79	haabu	37

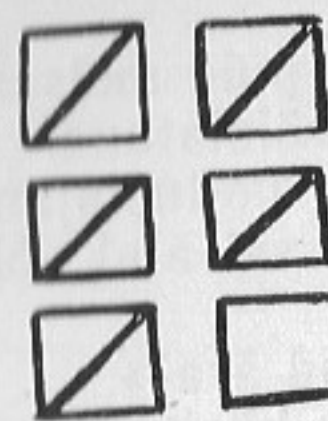
Ka perenaine võib toimida samuti ning säästa pesu kokku lugedes palju aega.

Kui teil on näiteks vaja loendada, milliseid taimi ja millisel hulgal kasvab väikesel niidul, siis teate juba, kuidas tulla selle ülesandega toime võimalikult lühikese ajaga. Te kirjutate paberilehele valmis varem täheldatud taimede nimetused, jättes igaühele eraldi lahtri ja tagavaraks veel mõne tühja lahtri taimede jaoks, mida võite ootamatult näha. Näiteks alustate loendust joonisel 35 esitatud nimestikuga.

Edasi toimite samuti nagu puude loendusel.



Joon. 30



Joon. 31



Joon. 32

Mände	
Kuuski	
Kaski	
Haabu	

Joon. 33

Mände	□ □ □ □ □ □
Kuuski	□ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □ □
Kaski	□ □ □ □ □ □ □
Haabu	□ □ □ □ □ □

Joon. 34

Võililli	
Tulikaid	
Tulehti	
Hobuoblikaid	
Hürekõrvu	

Joon. 35

44. Milleks loendada puid metsas? Linnainimesele paisab see isegi päris võimatuks. Lev Tolstoi romaanis «Anna Karenina» küsib põllumajanduse asjatundja Levin oma sugulaselt, kes on sel alal võhik ja kavatses metsa müüa:

«Kas sa lugesid puud ära?»

«Mis, puid lugeda?» küsis Stepan Arkaditš naerdes püüdes kogu aeg sõbra halba tuju peletada. «Ja kuigi liiva, tähekiiri võiks loendada su ülev vaim...»

«Jah, aga Rjabinini (kaupmehe — J. P.) «ülev vaim» võibki seda. Ja ükski kaupmees ei osta metsa, ilma et ta oleks puid ära lugenud...»

Puid loendatakse metsas eesmärgiga tuvastada, mitu kuupmeetrit on neis puitu. Üle ei loeta mitte terve metsa puid, vaid teatud lank, veerand või pool hektarit, mis valitakse nii, et tema puude tihedus, koosseis, jämedus ja kõrgus vastaksid antud metsa keskmisele. Niisuguse proovilangi leidmiseks on loomulikult vaja kogenud silma. Loendamisel ei piisa puude arvukuse määramisest liigiti, tarvis on veel teada, kui palju on mingi jämedusega puid: kui palju 25-sentimeetrilisi, 30-sentimeetrilisi, 35-sentimeetrilisi jne. Seepärast ei ole loenduslehel mitte neli lahtrit, vaid hoopis rohkem. Nüüd võib kujutleda, mitu korda tuleks mets risti-põiki läbi käia, loendades puid harilikul kombel, aga mitte siinvaadeldud viisil.

Nagu näete, on loendus lihtne ja kerge ainult juhul, kui tegemist on ühesuguste esemetega. Ent erinevate esemete arvu tuvastamiseks tuleb kasutada erilisi, ülalpool kirjelatud võtteid, mille olemasolust ei ole paljudel aimugi.

VIIES PEATÜKK

Arvumõistatused

45. Viie rubla eest sada. Üks estraadiartist tegi esine-
des kuulajatele järgmise ahvatleva pakkumise:

«Teatan tunnistajate juuresolekul, et maksan 100 rubla igasüüa, kes annab mulle 5 rubla 20 mündina — viie-
kümmene — ja viiekopikalistes. Sada rubla viie eest! Kes soovib?»

Maad võttis vaikus.

Rahvas laskus mõtisklusse. Pliiatsid kribisid märkmi-
kulehtedel, kuid vastust pakkumisele ei tulnud.

«Paistab, et publik peab viit rubla liiga kõrgeks hin-
naks saja eest. Hea küll, olen nõus alandama hinda kahe
rubla võrra: 3 rubla kahekümne mainitud väärtusega
mündina! Maksan sada rubla kolme eest! Soovijad, võtke
sapp!»

Aga järjekorda ei tekkinudki. Rahvas ilmselt viivitas
harukordse juhuse kasutamisega.

«Kas tõesti on ka 3 rubla kallid? Hästi, langetan hinda
veel rubla võrra; makske mainitud mündides kõigest kaks
rubla, ja ma annan teile kohe selle eest sada.»

Et keegi ei ilmutanud soovi vahetuskaupa teha, jätkas
artist:

«Aga äkki pole teil nii palju peenraha kaasas? Ärge
laske end sellest häirida, ma annan võlgu. Lepin sellega,
kui annate mulle paberilehe, kus on kirjas, missuguste
müntidega te tasute.»

46. Tuhat. Kas võite väljendada arvu 1000 kaheksa
ühesuguse numbriga? Loomulikult on lubatud kasutada
peale numbrite veel tehtemärke.

47. Kakskümmend neli. Väga lihtne on väljendada
kolme 8 abil arvu $24 = 8 + 8 + 8$. Aga kas võite teha sama
kolme muu ühesuguse arvuga? Ulesandel on lahendusi
rohkem kui üks.

48. Kolmkümmend. Arvu 30 on lihtne väljendada kolm viiega: $5 \times 5 + 5$. Raskem on seda teha kolme muu üh suguse numbriga.

Proovige. Võib-olla leiata koguni rohkem kui ü lahenduse?

49. Puuduvad numbrid. Selles korrutises on üle poo numbritest asendatud tärnidega.

$$\begin{array}{r} \times \quad \times 1 \times \\ 3 \times 2 \\ \hline \times 3 \times \\ 3 \times 2 \times \\ \times 2 \times 5 \\ \hline 1 \times 8 \quad \times 30 \end{array}$$

Kas oskate taastada puuduvad numbrid?

50. Missugused arvud? Siin on veel üks niisugun ülesanne. Küsitakse, millised arvud esinevad korrutise

$$\begin{array}{r} \times \quad \times \times 5 \\ 1 \times \times \\ \hline 2 \times \times 5 \\ 13 \times 0 \\ \times \times \times \\ \hline 4 \times 77 \times \end{array}$$

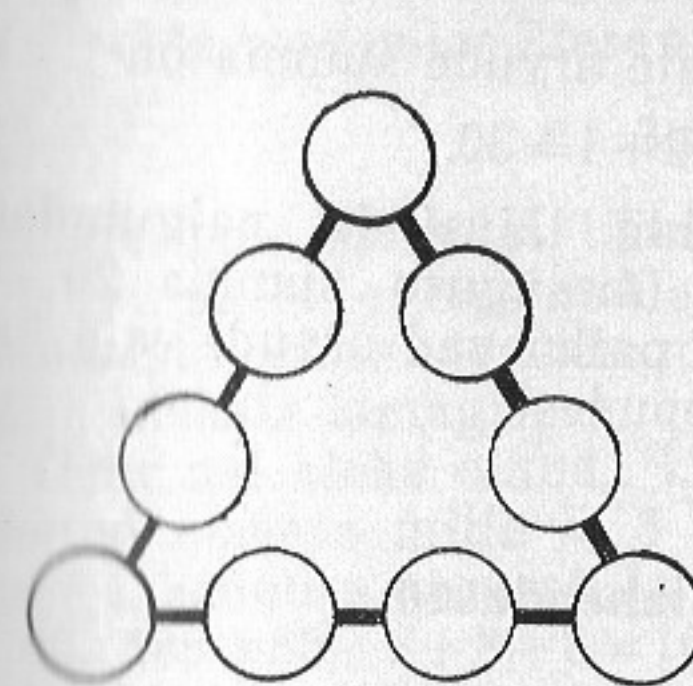
51. Mida jagati? Leidke puuduvad numbrid ka selle jagamistehtes:

$$\begin{array}{r} \times 2 \times 5 \times \quad | \quad 325 \\ \times \times \times \quad | \quad 1 \times \times \\ \hline \times 0 \times \times \\ \times 9 \times \times \\ \hline \times 5 \times \\ \times 5 \times \\ \hline 0 \end{array}$$

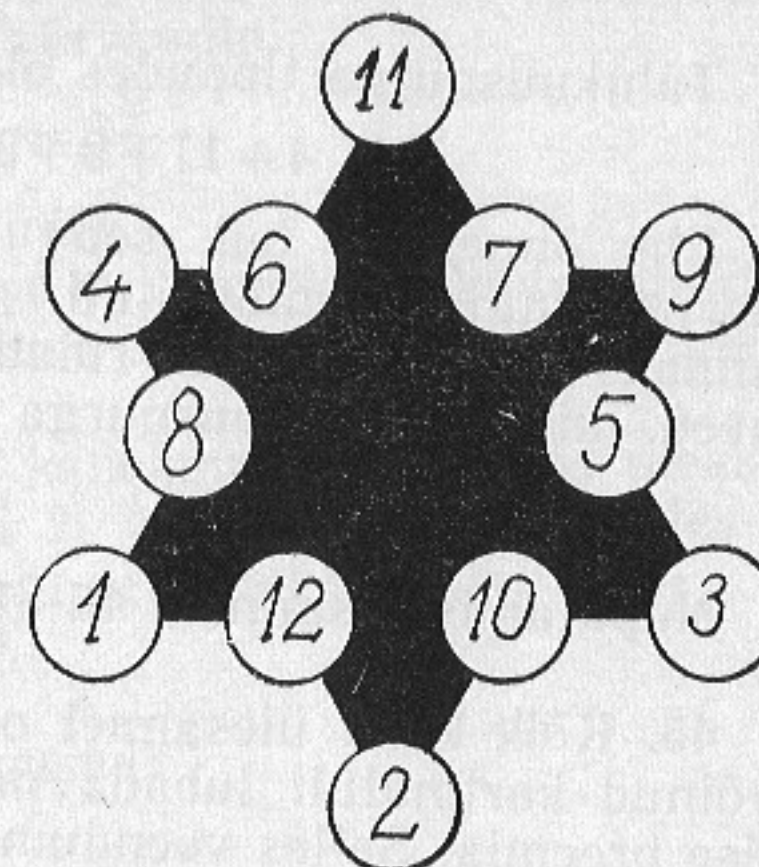
52. Jagamine üheteistkümnega. Kirjutage mingi ühek sakohaline arv, milles pole korduvaid numbreid (kõik numbrid on erinevad) ja mis jagub jäägita 11-ga.

Kirjutage neist arvudest suurim.

Kirjutage neist arvudest väikseim.



Joon. 36



Joon. 37

53. Kummalised korrutised. Vaadeldge korrutist

$$48 \times 159 = 7632.$$

Korrutis on tähelepanuväärne selle poolest, et sisaldab kõik üheksa nullist erinevat numbrit.

Kas võite tuua veel mõne niisuguse näite? Kui palju neid on, kui neid üldse on?

54. Arvukolmnurk. Kirjutage selle kolmnurga (joon. 36) ringidesse kõik üheksa numbrit, nii et nende summa oleks igal küljel 20.

55. Veel üks arvukolmnurk. Kirjutage sellesama kolmnurga (joon. 36) ringidesse kõik üheksa numbrit, nii et nende summa oleks igal küljel 17.

56. Maagiline täht. Joonisel 37 kujutatud kuusnurkne arvtäht on «maagiline»: kõik kuus arvurida annavad ühe ja sama summa. Tõepoolest,

$$\begin{aligned} 4 + 6 + 7 + 9 &= 26, \\ 4 + 8 + 12 + 2 &= 26, \\ 9 + 5 + 10 + 2 &= 26, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 11 + 6 + 8 + 1 &= 26, \\ 11 + 7 + 5 + 3 &= 26, \\ 1 + 12 + 10 + 3 &= 26. \end{aligned}$$

Tähtkuusnurga tippudes olevate arvude summa on

$$4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30.$$

Ehk õnnestub teil seda tähte täiustada, paigutades arvud ringides ümber nii, et ühesuguse summa 26 ei annaks üksnes sirgetes ridades paiknevad arvud, vaid ka need, mis asuvad kuusnurga tippudes?

Nuputamisülesannete 45–56 lahendused

45. Kõik kolm ülesannet on lahendamatud, artist oleks võinud kartmatult lubada nende lahendamise eest suvalise preemia. Selles veendumiseks võtame appi algebra ja vaatame ülesandeid järgemööda.

Viie rubla maksmine. Oletame, et maksmine on võimalik x 50-kopikalise, y 20-kopikalise ja z 5-kopikalise abil. Saame võrrandi

$$50x + 20y + 5z = 500.$$

Jagades selle viiega, saame

$$10x + 4y + z = 100.$$

Lisaks teame, et münte on kokku 20, s. t. x , y ja z on seotud võrrandiga

$$x + y + z = 20.$$

Lahutades selle võrrandi esimesest, saame

$$9x + 3y = 80.$$

Jagame viimase 3-ga, saame

$$3x + y = 26 \frac{2}{3}.$$

Kolmekordne 50-kopikaliste arv $3x$ on loomulikult täisarv. Täisarv on kindlasti ka 20-kopikaliste arv y . Kahe täisarvu summa ei saa olla murdarv $26 \frac{2}{3}$. Nagu näete, on meie eeldus ülesande lahendatavusest väär. Ülesanne pole lahenduv.

Samasugusel moel võib lugeja veenduda ka ülejäänud kahe, «odavdatud» ülesande lahendamatuses. 3 rubla maksmise ülesanne viib võrrandini

$$3x + y = 13 \frac{1}{13}$$

ja 2 rubla maksmise ülesanne võrrandini

$$3x + y = 6 \frac{2}{3}.$$

Kumbki pole lahenduv täisarvudes.

Nagu näete, ei riskinud artist millegagi, pakkudes suuri summasid ülesande lahendamise eest: preemiat ei tule välja maksta kunagi.

Teine asi oleks olnud, kui kahekümne mündiga oleks nõutud maksta mitte 5, 3 või 2, vaid 4 rubla: see ülesanne lahenduks kergesti ja isegi seitsmel eri viisil*.

$$46. \quad 888 + 88 + 8 + 8 + 8 = 1000.$$

On ka teisi lahendusi.

47. Kaks lahendust on järgmised:

$$22 + 2 = 24; \quad 3^3 - 3 = 24.$$

48. Esitame kolm lahendust:

$$6 \times 6 - 6 = 30; \quad 3^3 + 3 = 30; \quad 33 - 3 = 30.$$

49. Puuduvad arvud taastame üksteise järel järgmise mõttekäiguga. Ülevaatlikkuse mõttes nummerdame read:

\times	$\times 1 \times$	I
	3×2	II
	$\times 3 \times$	III
	$3 \times 2 \times$	IV
	$\times 2 \times 5$	V
	$1 \times 8 \times 30$	VI

Kerge on taibata, et viimane tärn III reas on 0: see selgub asjaolust, et VI rea lõpus on samuti 0.

Nüüd määrame I rea viimase täрни: see on arv, mis annab 2-ga korrutades 0-ga lõppeva arvu ja 3-ga korrutades 5-ga lõppeva arvu. Niisugune arv on ainult 5.

Edasi on selge, et IV rea lõpus seisab 0. (Võrrelge numbreid, mis seisavad paremalt teisel kohal III ja VI reas.)

Pole raske taibata, mida tähendab tärn II reas: see on 8, sest ainult 8 korrutis 15-ga lõpeb 20-ga.

Viimaks saab selgeks ka I rea esimese täрни tähendus: see on 4, sest ainult 4 annab 8-ga korrutades 3-ga algava tulemuse (IV rida).

* Üks lahendus on järgmine: 6 50-kopikalist, 2 20-kopikalist ja 12 5-kopikalist.

Lõpptulemusena saame korrutise:

$$\begin{array}{r} \times 415 \\ 382 \\ \hline 830 \\ 3320 \\ 1245 \\ \hline 158530 \end{array}$$

50. Arutledes samuti kui eelmises ülesandes, saame:

$$\begin{array}{r} \times 325 \\ 147 \\ \hline 2275 \\ 1300 \\ 325 \\ \hline 47775 \end{array}$$

51. Otsitav jagamistehe on järgmine:

$$\begin{array}{r|l} 52650 & 325 \\ 325 & 162 \\ \hline 2015 \\ 1950 \\ \hline 650 \\ 650 \\ \hline 0 \end{array}$$

52. Selle ülesande lahendamiseks peame teadma 11-ga jaguvuse tunnust. Arv jagub 11-ga, kui tema paariskoh-tadel asuvate numbrite summa ja paaritutel kohtadel ole-vate numbrite summa vahe jagub 11-ga või on 0. Uurime näiteks arvu 23 658 904.

Paariskohtadel seisvate numbrite summa on

$$3+5+9+4=21$$

ja paaritutel kohtadel olevate numbrite summa on

$$2+6+8+0=16.$$

Nende vahe (lahutada tuleb suuremast arvust väiksem)

$$21-16=5.$$

Et 5 ei jagu 11-ga, siis ei jagu 11-ga ka vaadeldud arv.

Vaatleme veel arvu 7 344 535;

$$\text{Siin } 3+4+3=10; 7+4+5+5=21; 21-10=11.$$

Et 11 jagub 11-ga, siis ka vaadeldud arv on arvu 11 kordne.

Nüüd on hõlbus taibata, missuguses järjekorras tuleb kirjutada 9 numbrit, et saada 11-ga jaguv arv.

Näiteks: 352 049 786.

Proovime järele: $3+2+4+7+6=22$, $5+0+9+8=22$.

Vahe $22-22=0$, mis tähendab, et vaadeldud arv jagub 11-ga.

Suurim neist arvudest on 987 652 413, vähim 102 347 586.

53. Kannatlik lugeja leiab kaheksa niisugust korrutist.

Need on

$$12 \times 483 = 5796,$$

$$42 \times 138 = 5796,$$

$$18 \times 297 = 5346,$$

$$30 \times 186 = 7254,$$

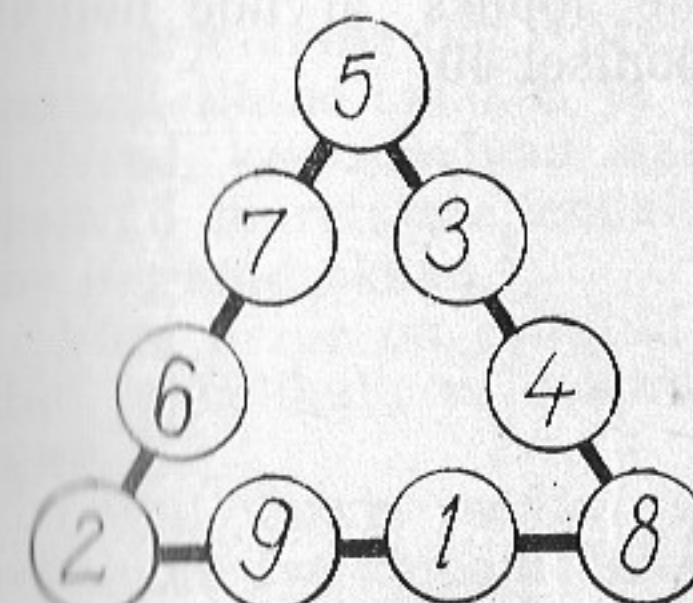
$$48 \times 159 = 7632,$$

$$28 \times 157 = 4396,$$

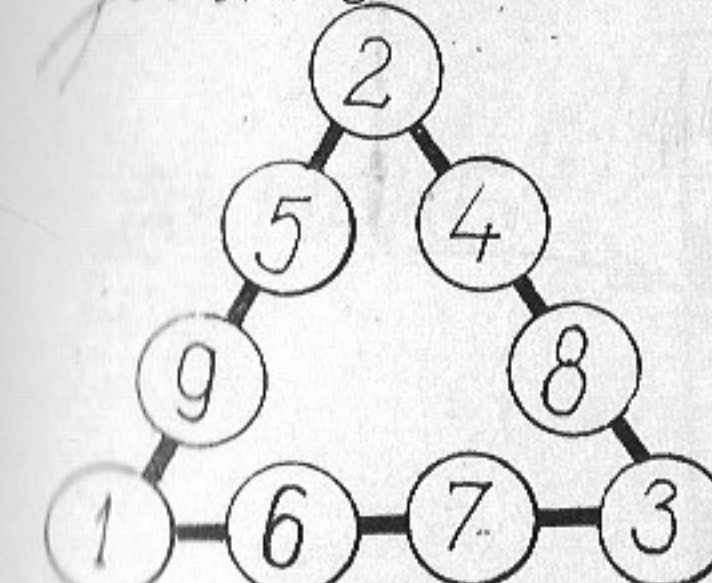
$$4 \times 1738 = 6952,$$

$$4 \times 1963 = 7852.$$

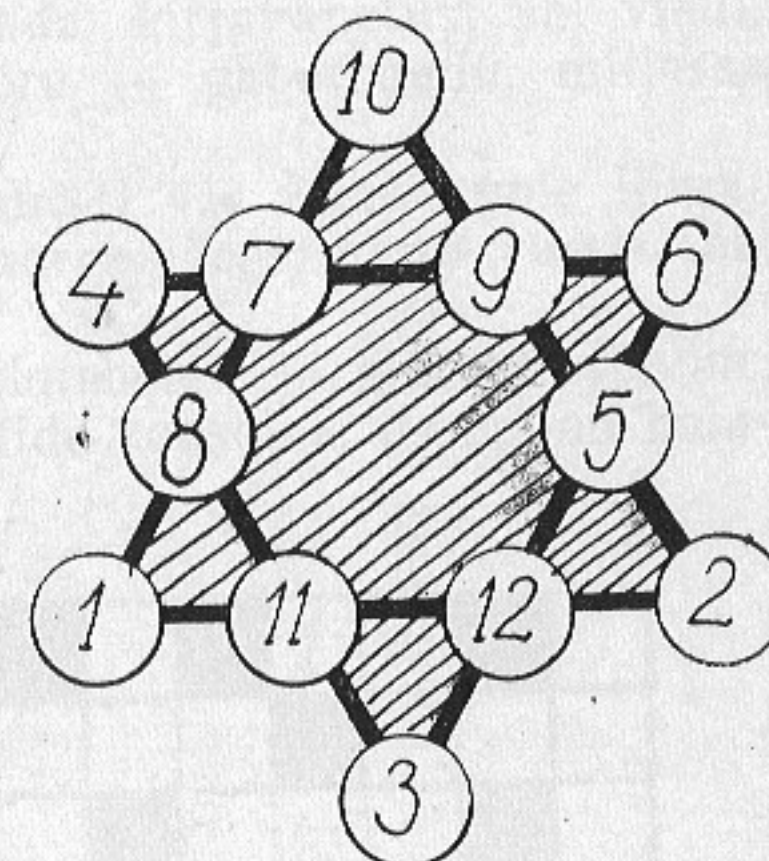
54–55. Lahendused on näidatud joonistel 38 ja 39. Ridade keskmisi arve võib omavahel ära vahetada ja saada veel terve rea lahendeid.



Joon 38



Joon 39



Joon 40

56. Et kergendada arvude nõutud paigutuse leidmist, juhindume järgmistest pidepunktidest.

Otsitava tähe tippudes olevate arvude summa on 26. Kõikide arvude summa on 78. Järelikult peab kuusnurga sees asuvate arvude summa olema 52.

Vaatleme nüüd üht suurt kolmnurka. Tema igal küljel paiknevate arvude summa on 26; liites need kokku, saame $26 \times 3 = 78$, kusjuures tippudes paiknevad arvud lähevad arvesse kaks korda. Aga et kolme sisemise arvupaari (s. t. sisemise kuusnurga arvude) summa on 52, siis on kumagi suure kolmnurga tippudes paiknevate arvude kahekordne summa $78 - 52 = 26$, nende ühekordne summa on 13.

Nüüd oleme eesmärgile juba lähemale jõudnud. Näiteks teame, et ei 12 ega 11 või olla kujundi tippudes (miks?). Järelikult võime katsetamist alustada 10-st. Kohe saame teada ka, mis arvud peavad olema selle kolmnurga ülejäänud tippudes: 1 ja 2.

Jätkates sama moodi, jõuame lõpuks arvude nõutud paigutuseeni. See on näidatud joonisel 40.

KUUES PEATÜKK

Sifreeritud kirjad

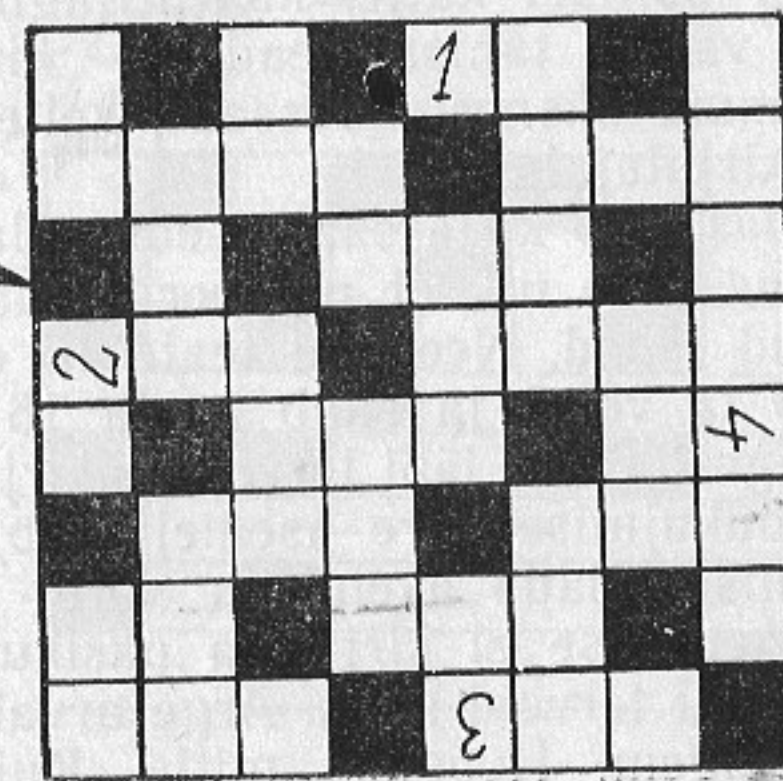
57. Võre. Põrandaalused revolutsionäärid peavad tegema märkmeid ja pidama seltsimeestega kirjavahetust nõnda, et ükski võoras ei saaks kirjutatust aru. Nad kasutavad selleks nn. salakirja (ehk krüptograafiat). On leiutatud mitmeid salakirjasüsteeme; neid ei kasuta sugugi üksnes põrandaalused, vaid ka diplomaadid ja sõjaväelased, kes teevad seda riigisaladuste hoidmiseks. Järgnevalt kirjeldame üht, võrena tuntud salakirja. See on suhteliselt lihtne salakiri ja tihedalt seotud aritmeetikaga.

Need, kes soovivad salastada kirjavahetust sel viisil, peavad muretsema endale võre — paberruudu, millesse on lõigatud aknad.

Võre näide on esitatud joonisel 41. Aknad pole lõigatud juhuslikult, vaid kindla korra järgi, nagu varsti selgub.

Olgu tarvis saata seltsimehele järgmine sõnum: «Muutke ära rajooni delegaatide koosolek. Keegi on hoianud politseid. Anna.»

AKNAKE



Joon. 41

Asetanud paberilehele võre, kirjutab pörandaalune aknakestesse üksteise järel tähed.

Et aknaid on kõigest 16, siis mahub korraga ära kõigest osa teksti.

Muutke ära rajooni...

Kõrvaldanud võre, näeme kirja, mis on kujutatud joonisel 42. Arusaadavalt pole selles veel midagi salajast: igaüks taipab kergesti, milles on asi. Aga see on alles algus; niisuguseks kiri ei jää. Pörandaalune keerab võret kellaosuti suunas veerand pöörde võrra, s. t. asetab selle samale paberilehele nõnda, et varem küljel olnud number 2 on nüüd ülal. Uues asendis katab võre kinni kõik kirjapandud tähed ja akendes ilmub puhas paber. Neisse kirjutatakse salakirja järgmised 16 tähte. Kõrvaldades nüüd võre, näeme joonisel 43 kujutatud kirja.

Niisugust kirjutist ei mõista ei võõras ega ka selle sisu unustanud autor.

Ent ikkagi on sõnumist kirja pandud ainult pool: Muutke ära rajoonidelegaatide kooso...

Edasi kirjutamiseks tuleb taas pöörata võret veerand pööret kellaosuti liikumise suunas. Ta katab kirjutise ja jätab vabaks 16 uut ruutu. Neisse mahuvad jälle mõned sõnad ja kirjutis võtab joonisel 44 näidatud kuju.

Lõpuks pööratakse võret viimast korda, number 4 on nüüd ülal, ja vabanenud 16 tühja ruutu kirjutatakse teate lõpuosa. Kui osa aknakesi jääb kasutamata, kirjutatakse neisse tähed a, b jne. — lihtsalt seepärast, et ei jääks tühje kohti.

Kiri näeb välja, nagu on kujutatud joonisel 45.

Proovige sellest midagi välja lugeda! Sattugu see kiri pealegi politsei kätte, kahtlustagu politseinikud pealegi, et see varjab tähtsat teadet — kirja sisust on suuteline aru saada üksnes adressaat, kellel on samasugune võre nagu kirjutajalgi.

Kuidas loeb kirja saaja seda salakirja? Ta asetab tekstile oma võre nii, et number 1 jääks üles, ja akendes ilmuvad tähed. Need on teate 16 esimest tähte. Seejärel pöörab ta võret ja saab teada 16 järgmist tähte. Nelja pöördega loeb ta läbi terve salakirja.

Ruudukujulise võre asemel võib kasutada ka ristkülikukujulist laiade akendega võret (joon. 46). Niisuguse võre akendes ei kirjutata üksikuid tähti, vaid sõnaosi või koguni terveid sõnu. Ärge arvake, et kirjutis on seetõttu selgem. Hoopiski mitte. Kuigi on näha üksikuid

M	U	U	
		T	
K	E		A'
	R		
A		R	
	J		
O		O	
	N		I

Joon. 42

M	D	U	E	U		
		L	T	E		
K	G	E		A	A'	
A		R	T		I	
	A	D		R	E	
A		K	J			
	O	O		O	O	S
O		N				I

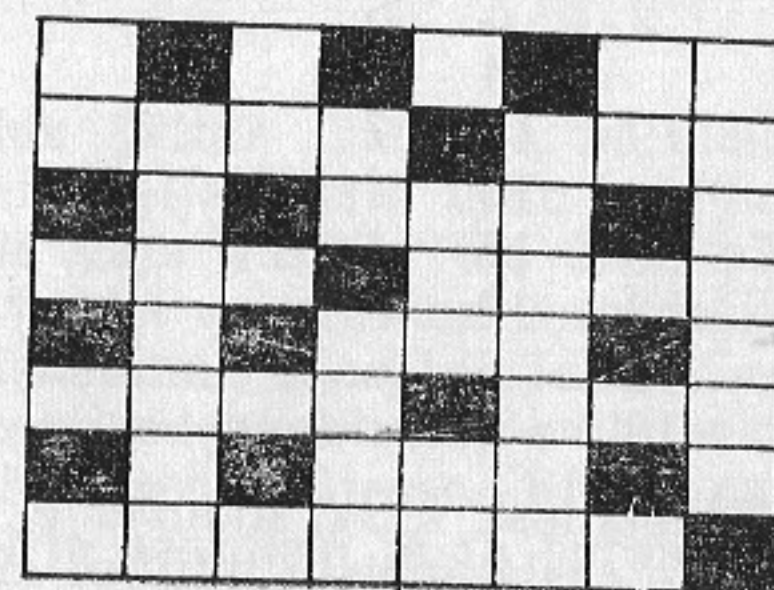
Joon. 43

L	M	D	U	E	E	U	
K		L	T	K		E	
K	G	E	E		A	A'	E
A		G	R	T		I	I
A	D		O	R	E		
N		K	J	H		O	
	O	O	I		O	O	S
O	A		N	T		A	I

Joon. 44

L	M	D	U	E	E	U	N
U	K	D	L	T	K	P	E
K	G	E	E	O	A	A'	E
A	L	G	R	T	I	I	I
T	A	D	S	O	R	E	E
A	N	I	K	J	H	D	O
A	O	O	I	N	O	O	S
O	A	N	N	T	N	A	I

Joon. 45



Joon. 46

1	2	3	4	13	9	5	1
5	6	7	8	14	10	6	2
9	10	11	12	15	11	7	3
13	14	15	16	16	12	8	4
4	8	12	16	16	15	14	13
3	7	11	15	12	11	10	9
2	6	10	14	8	7	6	5
1	5	9	13	4	3	2	1

Joon. 47

I	II
III	IV

Joon. 48

silpe ja sõnu, paiknevad nad niisuguses korratuses, saladus on piisava kindlusega hoitud. Piklik võre asetatakse paberile kõigepealt ühtpidi, pööratakse 180° ja asetatakse uuesti paberile. Seejärel keeratakse võre teisipidi ja kasutatakse jälle kahes asendis. Igas uues asendis katab võre kogu varem kirjutatud teksti.

Kui oleks võimalik kõigest üks võre kuju, ei saaks sel abil hoida ühtki saladust. Kindlasti oleks samasugune võre ka politseis ning hoolega varjatu paljastataks silmipilk. Ent erinevaid võresid on tohutult palju.

Kõik võred, mida saab valmistada 64-väljalise ruudjaoks, on ära märgitud joonisel 47. Aknad võite lõigata suvalisse 16 ruutu, hoolitsedes vaid selle eest, et valitud ruutude numbrid ei korduks. Meie kasutasime oma näites võret, mille ruudud kandsid numbreid.

2	4	5
	14	
9	11	7
	16	
8	15	
3	12	
10	6	
13	1	

Tõepoolest, ükski number ei kordu.

Pole raske mõista, millise süsteemi järgi on arvud paigutatud ruutu joonisel 47. See ruut jagatakse ristuva

sirgetega neljaks väiksemaks, mida tähistame rooma numbritega I, II, III ja IV (joon. 48). Ruudus I on ruudukesed nummerdatud tavalises järjekorras. Ruut II saadakse ruudust I, pöörates seda veerand pöörde võrra päripäeva. Pööranud seda veel 90°, saame ruudu III, järgmise 90°-se pöördega saame ruudu IV.

Lelame nüüd matemaatiliselt, kui palju on erinevaid võresid. Akna 1 võib lõigata 4 eri kohta. Igal juhul neist saab akna 2 teha samuti 4 eri kohta. Järelikult võib 2 akent paigutada $4 \times 4 = 16$, kolm akent $4 \times 4 \times 4 = 64$ eri viisil. Arutlust jätkates saame, et 16 akent võib paigutada 4¹⁶ eri viisil. See arv ületab 4 miljardit. Isegi kui oletada, et oleme oma arutlusega mitu korda üle pakkunud (on ju ehamugav kasutada võret, milles aknad paiknevad kõrvuti), jääb järele mitusada miljonit. Eks proovige leida nende hulgast just seda, mida vaja.

Isegi kui dešifreerijate rühmal kulub võre valmistamiseks ja selle sobivuse kontrolliks kõigest minut, võib dešifreerimine kesta sadu miljoneid minuteid — see on terveid aastatuhandeid. Muide, viimane kehtib küll ainult juhul, kui dešifreeritakse n.-õ. käsitsi. Sama autori raamatust «Huvitav algebra» võite lugeda kiiretest arvutitest. Need masinad võivad etteantud programmi järgi sooritada sadu tuhandeid või isegi miljoneid tehteid sekundis. Kuid nad oskavad muudki peale arvutamise. Näiteks võivad nad koostada kõikvõimalikud võred ja kontrollida, milline neist annab mõtestatud teksti — tuleb üksnes koostada vastav programm. Ütleme, et ühe võre sobivuse kontrollimiseks kulub arvutil tuhandik sekundit. Sel juhul vaatab ta sajad miljonid võred üle sadade tuhandete sekunditega, s. o. mõne ööpäevaga. Nagu näete, on meie päevil hoopis raskem pidada salastatud kirjavahetust.

58. Kuidas võret meelde jätta? Oletame, et meil ei pruugi karta masinaid, mis paljastaksid meie saladused. Ütleme, et kirja sisu pole vaja varjata üle 2–3 päeva ning selle ajaga ei jõuta teadet arvutuskeskuses dešifreerida. Põrandaalused on otsustanud edastada teate võrega. Loomulikult peavad asjaosalised hoolitsema selle eest, et nende võre ei satuks võõrastesse kätte. Kõige parem oleks lõigata võre alles kirja saamisel ja ta pärast kasutamist uuesti hävitada. Ent kuidas pidada meele akna-keste paigutust? Ka siin aitab meid matemaatika. Akna-

$82 = 01010010 =$	
$8 = 00001000 =$	
$102 = 10100010 =$	
$16 = 00010000 =$	
$68 = 01000100 =$	
$136 = 10001000 =$	
$34 = 00100010 =$	
$17 = 00010001 =$	

Joon. 49

kese tähistame number ühe ja lahtilõikamata ruudukes nulliga. Siis saaksime võre ülemise rea jäädvustada kujul

01010010

või, jättes ära esimese nulli, kujul

1010010.

Liigsete esimeste nullideta saab teise rea kirjutada üle kujul

1000.

Ülejäänud ridu tähistavad arvud

10100010	10001000
10000	100010
1000100	10001.

Lihtsustamaks nende arvude üleskirjutust loeme, et need arvud pole kirjutatud üldkasutatavas kümnendsüsteemis vaid kahendsüsteemis. See tähendab, et number üks pole oma parempoolsest «naabrist» suurem mitte 10, vaid kõigest 2 korda. Kõige paremal seisev 1 tähendab ikkagi tavalist ühte. Niimoodi tõlgendatuna on arv 1010010, mis tähistab esimese rea aknakeste paigutust, võrdne kümnendsüsteemi arvuga

$$64 + 16 + 2 = 82,$$

sest nullid tähendavad 2 vastavate astmete puudumist.

Arv 1000 (teine rida) asendub kümnendsüsteemi 8-ga. Ülejäänud arvud asendatakse järgmiselt:

$$128 + 32 + 2 = 162,$$

$$16,$$

$$64 + 4 = 68,$$

$$128 + 8 = 136,$$

$$32 + 2 = 34,$$

$$16 + 1 = 17.$$

Arve 82, 8, 162, 16, 68, 136, 34, 14 polegi nii raske meelde jätta. Aga neid teades võib alati taastada esialgse arvuhulga, mis näitab otseselt akende paigutust võres. Vaatleme näiteks esimest arvu 82. Jagame selle 8-ga, et teada saada, kui palju on temas kahtesid; saame 41, jääki ei ole — järelikult on viimaseks numbriks, ühelistel kohal, 0. Saadud kaheliste arvu 41 jagame 2-ga, et teada, kui palju on meie arvus neljasid:

$$41 : 2 = 20, \text{ jääk } 1.$$

See tähendab, et kaheliste kohal, paremalt teisena, on number 1.

Järgmisena jagame 20 2-ga, et teada saada, kui palju on meie arvus kaheksaid:

$$20 : 2 = 10.$$

Jääki pole, järelikult seisab neljaliste kohal 0.

10 jagub 2-ga jäägita: ka kaheksaliste kohal on 0.

Jagades 5 2-ga, saame 2 ja jäägiks 1: selles järgus seisab number 1. Lõpuks jagame 2 2-ga ja saame teada, et järgmises järgus seisab 0 ja viimases 1 (see järk vastab 64-le).

Niisiis on otsitav arv

1010010.

Et selles arvus on kõigest 7 numbrit, aga otsitavas arvus pidi olema 8, siis on selge, et arvul peab olema veel üks null. Akende paigutus esimeses reas on määratud numbritega

01010010.

Aknakesed on 2., 4. ja 7. ruudus.

Samuti taastatakse akende paigutus ka teistes ridades.

Nagu öeldud, on erinevaid salakirjasüsteeme palju. Meie vaatlesime nendest võret seepärast, et ta on tihe-
dalt seotud matemaatikaga ja näitab ilmekalt, kui mitmekülgsesse eluvaldkondadesse on tunginud see teadus.

Jutustusi arvuhiiglastest

59. Kasulik tehing. Pole teada, kus ja millal see lugu juhtus. Võib-olla pole seda kunagi juhtunudki, mis ongi kõige usutavam. Kuid nii või teisiti on see küllalt huvitav.

Miljonär saabus reisilt iseäranis rõõmsana: tal oli olnud õnnelik kohtumine, mis töötas suuri kasumeid.

«On ju vahel selliseid õnnelikke juhuseid,» rääkis ta kodus. «Arvatavasti ei öelda põhjusest, et raha teeb raha. Minu oma samuti. Ja kui ootamatult! Kohtasin reisil tundmatut, kes millegagi silma ei paistnud. Mul ei sobinud temaga juttu teha, aga ta ise hakkas pihta, kui taipas, et elan külluses. Jutu lõpuks pakkus ta nii kasulikku tehingut, et mul jäi hing kinni.

«Sõlmime sinuga lepingu,» ütles ta. «Toon sulle kuu jooksul iga päev sada tuhat rubla. Mõistagi ei tee ma seda muidu, aga tasu on tühine. Esimesel päeval maksad — veider küsidagi — kõigest kopika.»

Ma ei uskunud oma kõrvu.

«Uhe kopika?»

«Kopika neh,» kinnitas tema. «Teise saja tuhande eest annad mulle 2 kopikat.»

«Noh, ja edasi?» küsisin kannatamatult.

«Edasi on nii, et kolmanda saja tuhande eest maksad 4 kopikat, neljanda eest 8, viienda eest 16 ja nii terve kuu, iga päev kaks korda rohkem kui eile.»

«Ja siis?» küsisin.

«Kõik,» ütles tema. «Edasi ei nõua ma enam midagi. Ainult lepingust tuleb kinni pidada: mina toon sulle igal hommikul sada tuhat ja sina maksad, nagu kokku leppisime. Ära mõtlegi lõpetada enne, kui kuu on möödas.»

Annab kopika eest sada tuhat! Kui see pole valeraha,



Joon. 50

«Ma pole see mees küll täie aru juures. Aga kes niisugust juhus peost laseb?»

«Hüva,» ütlesin, «too raha. Mina maksan, nagu kokku lepitud. Sina aga ära mõtlegi tüssata: too õige raha.»

«Ole mureta,» ütles võõras. «Raha oota homme hommikul.»

Nüüd kardan, kas ta ikka tuleb. Äkki taipab ta saada kahju suurust? Aga noh, hommik pole kaugel.»

Möödus päev. Varahommikul koputas rikka mehe aknale tundmatu, keda ta oli kohanud teel.

«Pane raha valmis,» ütles ta. «Tõin enda oma kaasa.»

Tulnud tuppa, asus too veidrik tööpoolest laduma lauale raha — tõelist, mitte valeraha. Lugened täpselt sada tuhat, ta ütles:

«Siin on minu oma, täpselt lepingu järgi. Nüüd sinu.»

Rikas asetas vaskmündi lauale ja jäi südamevärinaga ootama, kas võõras võtab selle vastu või mõtleb ümber ja korjab oma raha kotti tagasi. Külaline vaatas kopikat, kaalus peopesal ja pistis kukrusse.

«Homme oota mind samal ajal. Ära unusta, et seekord maksad kaks kopikat,» ütles ta ja lahkus.

Jõukas mees ei uskunud oma õnne: sada tuhat oli nagu maast leitud! Ta luges raha veel kord üle, uuris hooliga, kas pole ikka valeraha — kõik oli õige. Peitnud raha kindlasse kohta, jäi ta ootama järgmist päeva.

Õösel haaras teda kahtlus: kas mitte röövel ei esinenud lihtsameelsena, et teha kindlaks, kuhu ta oma raha peidab.

Rikas sulges hooliga ukse ja pidas õhtust saati hooliga akent silmas ning kuulatas, kas pole kahtlasi krõbinaid. Ta ei suutnud kaua uinuda. Hommikul kõlas uuesti aknale koputus: võõras tõi raha. Ladunud lauale sada tuhat, võttis ta kaks kopikat, peitis raha kaukasse ja läks pillates hüvastijätuks:

«Homseks pane valmis neli kopikat.»

Rikas mees röömustas uuesti: juba teine sada tuhat saadud niisama! Külaline polnud hoopiski röövli moodi ei vahtinud ringi ega midagi, vaid nõudis ainult oma kopikaid. Veider vend! Oleks siisuguseid ilmas rohkem, küll siis elaksid targad inimesed hästi...

Tulnud kolmandal päeval, andis tundmatu kolmanda saja tuhande 4 kopika eest.

Järgmine päev õnnestus tal samal viisil saada neljas sada tuhat 8 kopika eest.

Tuli ka viies sada tuhat — 16 kopika eest.

Siis kuues 32 kopika eest.

Seitsme päevaga oli rikas teeninud seitsesada tuhat rubla ja maksnud selle eest

1 kop.+2 kop.+4 kop.+8 kop.+16 kop.+32 kop.+64 kop.=rbl. 1.27.

Asi meeldis meie ahnele miljonärile ning ta kahetses juba, et leping oli kõigest üheks kuuks. Üle kolme miljoni teenida ei õnnestu. Kui õige meelitaks seda veidrikku kasvõi poole kuu võrra lepingut pikendama? Aga ei tea, kas tihkab: äkki ta saab aimu, et annab raha ära ilmaasjata...

Aga tundmatu saabus igal hommikul õigel ajal, kaasa sada tuhat. Kaheksandal päeval sai ta rbl. 1.28, 9-ndal rbl. 2.56, 10-ndal rbl. 5.12, 11-ndal rbl. 10.24, 12-ndal rbl. 20.48, 13-ndal 40.96, 14-ndal 81.92.

Rikas maksis lahkesti: ta oli saanud juba miljon neli sada tuhat, aga maksnud kõigest umbes sada viiskümmend.

Ent rikka mehe rööm ei kestnud kaua. Oige varsti taipas ta, et võõras polnud üldsegi lihtsameelne. Tehing polnud sugugi nii tulus, nagu oli algul tundunud. Viieteistpäeva pärast ei piirdunud makstav summa enam kopikalega, vaid ulatus sadadesse rubladesse ja kasvas kohutavalt. Kuu teisel poolel maksis rikas

15. saja tuhande eest rbl. 163.84,

16. „ „ „ „ 327.68,

17. „ „ „ „ 655.36,

18. „ „ „ „ 1 310.72,

19. „ „ „ „ 2 621.44.

Muide, rikas ei pidanud enda asju veel kuigi halvaks: ta maksis küll palju, kuid oli teeninud 1,8 miljonit.

Ent tulu kahanes iga päevaga üha kiiremini.

20. saja tuhande eest rbl. 5 242.88,

21. „ „ „ „ 10 485.76,

22. „ „ „ „ 20 971.52,

23. „ „ „ „ 41 943.04,

24. „ „ „ „ 83 886.08,

25. saja tuhande eest rbl. 167 772.16,

26. „ „ „ „ 335 544.32,

27. „ „ „ „ 671 088.64.

Rikas maksis juba rohkem, kui sai. Ta oleks meeleldi lõpetanud, aga lepingut ei saanud ju rikkuda.

Edasi läksid asjad veelgi halvemini. Liiga hilja taipas miljonär, et võõras oli külmavereliselt üle kavaldanud, saades hoopis rohkem raha, kui välja andis...

Kahekümne kaheksandal päeval ületas makstav summa miljoni. Kaks viimast päeva laostasid ta. Siin on need lohutud summad:

28. saja tuhande rubla eest rbl. 1 342 177.28

29. „ „ „ „ „ 2 684 354.56

30. „ „ „ „ „ 5 368 709.12

Kui külaline lahkus viimast korda, lõi miljonär kokku oma kulud, mis olid esialgu paistnud tühised olema kolme miljoni eest. Selgus, et tundmatule sai antud

10 737 418 rbl. 23 kop.

Peaaegu 11 miljonit!... Ja alanud oli kõik ühestain-
sast kopikast. Võõras oleks võinud tuua päevas kasvõi
kolmsada tuhat ja ikkagi poleks kahju kannatanud.

Selle loo lõpetuseks näitan, kuidas võib kiiremini
leida miljonäri väljamakseid, s. o. kuidas kõige kiiremini
liita kokku arvurida

$$1+2+4+8+16+32+64+\dots$$

Pole raske märgata nende arvude eripära:

$$1=1$$

$$2=1+1$$

$$4=(1+2)+1$$

$$8=(1+2+4)+1$$

$$16=(1+2+4+8)+1$$

$$32=(1+2+4+8+16)+1$$

.....

Näeme, et iga arv selles reas võrdub eelmiste sum-
maga, millele on liidetud üks. Seepärast liites sellise rea
liikmed näiteks 1-st 32768-ni, lisame üksnes viimasele
liikmele eelmiste summa — teisiti öeldes, lisame selle-
sama arvu, millest on lahutatud üks (32768—1). Saame
65535.

Nõnda saame ahne miljonäri väljamaksed leida väga
kiiresti, kui ainult teame summat, mida ta maksis viima-
sel päeval. See oli 5368709 rbl. 12 kop.

Liites 5368709 rbl. 12 kop. ja 5368709 rbl. 11 kop.,
saamegi otsitava tulemuse:
10737418 rbl. 23 kop.

60. Linnakumu. Lihtsalt üllatav, kui kiiresti levivad
linnas kuulujutud. Mõni kord ei kulu paari tundigi, et
terve linn saaks teada sündmusest, mida nägid pealt
üksikud. See ebatavaline kiirus tundub hämmastav või
isegi mõistatuslik.

Ent arvutused hajutavad salapära: kõik on seletatav
arvude omadustega.

Vaatleme näiteks niisugust juhtu.

1. Väikesse 50000 elanikuga linna saabus hommikul
kell 8 pealinlane, tuues kaasa värske, huvitava uudise.
Majas, kus tulnukas peatus, rääkis ta sellest kõigest kol-
mele linlasele, milleks kulus, ütlemine veerand tundi.

Niisiis teadsid 8.15 uudist kõigest neli inimest: tulnu-
kas ja kolm linlast.

Kuulnud uudisest, rääkis iga linlane selle edasi kol-

mele inimesele. Ka see võttis aega veerand tundi. Järeli-
kult, pool tundi pärast uudise saabumist teadsid sellest
juba $4+(3\times3)=13$ inimest.

Igaüks 9 uudist kuulnud linnakodanikust rääkis sellest
lahima veerand tunni jooksul omakorda 3 inimesele, nii
et 8.45 teadsid sellest juba

$$13+(3\times9)=40 \text{ kodanikku.}$$

Kui kõmu levis ka edasi samasuguse kiirusega, s. t.
igaüks, kes sellest kuulis, levitas juttu veerand tunni
jooksul edasi kolmele kaaskodanikule, siis

9.00	olid uudisest kuulnud	$4+(3\times27)=121$	inimest,
9.15	"	$121+(3\times81)=364$	"
9.30	"	$364+(3\times243)=1093$	"

Poolteist tundi pärast kuulujutu lahtilaskmist teadis
sellest juba ligi 1100 inimest. 50000 elaniku kohta ei
paista see olevat kuigi suur arv. Võib näida, et kulub
veel kaua aega, enne kui kõmu teeb linnale tiiru peale.
Jälgime edasi kõmu levikut:

9.45	$1093+(3\times729)=3280$	in.
10.00	$3280+(3\times2187)=9841$	in.

Veel veerand tundi, ja uudist on kuulnud juba üle
poole linnaelanikest:

$$9841+(3\times6561)=29524$$

Järelikult olid kõik 50000 linnaelanikku juba enne poolt
üheteistkümmet kuulnud juttu, mida kell kaheksa teadis
ainult üks inimene.

2. Jälgime ülaltoodud arvutuste käiku.

Põhiliselt tugineb see järgmise arvurea summeerimi-
sele:

$$1+3+(3\times3)+(3\times3\times3)+(3\times3\times3\times3)+\dots$$

Kas ei saa seda summat leida kuidagi kiiremini, näi-
teks sedamoodi, nagu leidsime varem arvurea $1+2+4+$
 $+8+\dots$ summa?

See on võimalik, võttes arvesse liidetava arvude oma-
duse, et

$$1=1$$

$$3=1\times2+1$$

$$9=(1+3)\times2+1$$

$$27=(1+3+9)\times2+1$$

$$81=(1+3+9+27)\times2+1$$

.....

Selle rea iga liige võrdub kahekordse eelmise liikmega, millele on liidetud 1.

Siit järeldub, et kui peame leidma selle rea kõikide liikmete summa 1-st teatud arvuni, siis piisab, kui liita viimasele arvule pool temast, millest on eelnevalt lahutatud 1.

Näiteks arvude

$$1+3+9+27+81+243+729$$

summa on $729 + \text{pool } 728\text{-st, s. t. } 729+364=1093$.

3. Meie näites rääkisid kõik uudisest kuulnud inimesed seda edasi kõigest kolmele. Kui linlased oleksid olnud jutukamad ja teatanud uudisest mitte 3-le, vaid 5-le kaas kodanikule, oleks kumu levinud loomulikult veelgi kiiremini.

Sel juhul teaksid

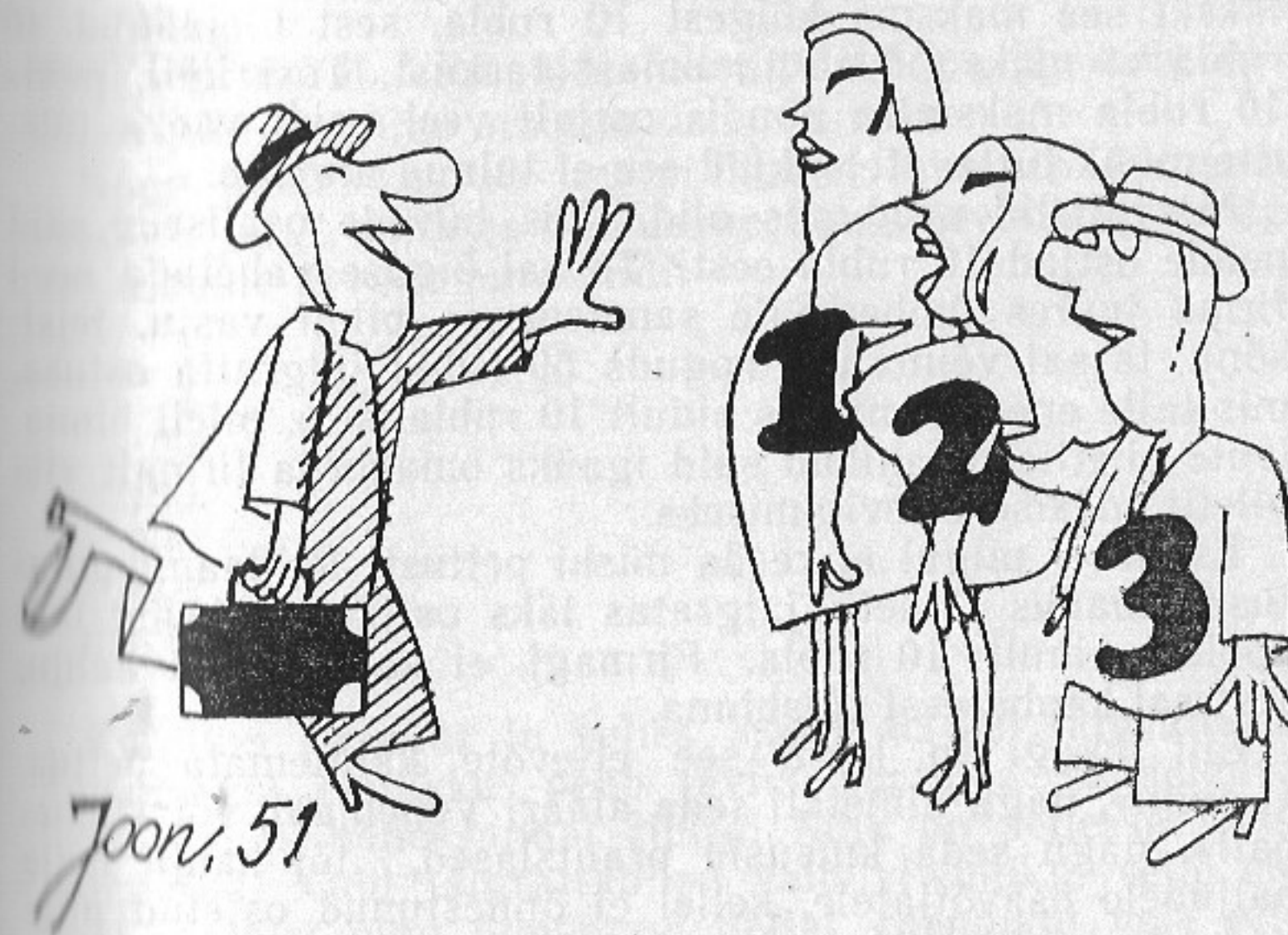
8.00	uudist	=	1 in.,
8.15	„	$1+5=$	6 in.,
8.30	„	$6+(5\times 5)=$	31 in.,
8.45	„	$31+(25\times 5)=$	156 in.,
9.00	„	$156+(125\times 5)=$	781 in.,
9.15	„	$781+(625\times 5)=$	3906 in.,
9.30	„	$3906+(3125\times 5)=$	19531 in.

Veel enne kolmveerand kümnet teaks uudist kogu 50 000 elanikuga linn.

Kuuldus liiguks veelgi kiiremini, kui iga linlane räägiks selle edasi kümnele. Sel juhul saame järgmise huvitava, kiiresti kasvava arvujada:

kell 8.00	=	1,
„ 8.15	$1+10=$	11,
„ 8.30	$11+100=$	111,
„ 8.45	$111+1000=$	1111,
„ 9.00	$1111+10000=$	11111.

Järgmine arv selles jadas oleks 111 111, mis näitab, et juba kümnenda tunni algul teab juttu kogu linn! Kuulujutt levib kõigest tunniga!



61. Odavate jalgrataste laviin. Enne revolutsiooni leidis Venemaal — aga piiri taga on neid veel praegugi — ettevõtjaid, kes leiutasid kaubast lahtisaamiseks üsna originaalseid võtteid, eriti kui pakutava kvaliteet pole suurem asi. Kõik algas sellest, et ajakirjanduses avaldati järgmise sisuga reklaam:

Jalgratas 10 rubla eest!
Igaüks võib muretseda endale jalgratta,
kulutades kõigest 10 rubla.
Kasutage erakordset juhust.
50 RUBLA ASEMEL — 10.
Ostutingimused saadetakse tasuta

Loomulikult ahvatles soodus kuulutus paljusid ning nad palusid endale saata selle ebatavalise ostu tingimused. Vastuseks järelepärimistele said nad üksikasjaliku prospekti, milles teatati järgmist.

Esiialgu ei saadeta 10 rubla eest veel jalgratast, vaid ainult neli piletit, mis tuleb müüa oma tuttavatele, 10 rubla tükk. Niiviisi kogutud 40 rubla tuleb saata firmale ja alles siis saabub jalgratas; järelikult ostjale endale

läkski see maksma kõigest 10 rubla, sest ülejäänud 40 rubla ei maksnud ta ju omast taskust. Tõsi küll, peale 10 rubla maksmise nõudis ostjalt veel veidi vaeva pile-tite müük tuttavatele, kuid see ei tulnud arvesse.

Mis piletid need, siis olid? Mis hüvede osaliseks said nende ostjad 10 rubla eest? Ta sai õiguse vahetada need firma juures ümber viie samasuguse pileti vastu, teisi sõnu, ta sai võimaluse koguda 50 rubla jalgratta ostuks, mis talle enesele maksis ainult 10 rubla, s. o. pileti hinna. Uute piletit omanikud said igaüks omakorda firmalt viis piletit edasiseks levitamiseks.

Esimesel pilgul ei reeda miski pettust. Reklaamikuulu-tuse lubadus täideti: jalgratas läks ostjale maksma töö-poolt ainult 10 rubla. Firmagi ei kannatanud kahju, sest sai kauba eest täishinna.

Ent ikkagi on kogu see ettevõtte kahtlemata pettus «Laviin», nagu nimetati seda afääri Venemaal, või «lume-pall», nagu seda kutsusid prantslased, tõi kahju neile paljudele osavõtjatele, kellel ei õnnestunud ostetud pile-teid edasi müüa. Nemad maksidki firmale kinni jalgratta 50-rublase maksumuse ja 10-rublase hinnavahe. Varem või hiljem pidi saabuma hetk, mil piletit omanikud ei leidnud neile enam ostjaid. Selle paratamatust mõistate kohe, kui suvatsete paberil kontrollida, kui kiiresti kas-vab laviini ahelreaktsiooni kaasakistud inimeste hulk.

Ostjaid, kes said piletid otse firmalt, leidsid harilikult ostjad suurema vaevata ning igaüks neist varustas pile-titega neli uut osavõtjat.

Need neli peavad müüma oma piletid 4×5 , s. o. 20 tuttavale, veendes neid ostu kasulikkuses. Oletame, et see õnnestub ja 20 ostjat on värvatud.

Laviin liigub edasi: 20 värsket piletiomanikku peavad nendega varustama $20 \times 5 = 100$ järgmist. Iga laviini «algataja» on tõmmanud sellesse

$$1 + 4 + 20 + 100 = 125 \text{ inimest,}$$

kellest 25-1 on jalgratas ning 100-1 kõigest lootus see 10 rubla eest saada.

Nüüd väljub laviin omavahel tuttavate inimeste kit-sast ringist ja voolab laiali mööda linna, kus tal aga värskete ohvrite leidmine muutub üha raskemaks. Viima-sed sada piletiomanikku peavad varustama niisuguste piletitega 500 kodanikku, kes omakorda peavad leidma

2500 uut ohvrit. Linn ujutatakse piletitega üle ning pile-tisoovijate otsimine muutub üsna raskeks.

Nagu näete, kasvab laviini kistud inimeste arv sama seaduse järgi, millega tutvusime kumu levimisest vestel-des. Saame arvude püramiidi:

1
4
20
100
2500
12500
62500

Kui linn on suur ja selles leidub 62 500 jalgrattasõi-duvõimelist elanikku, peab laviin peatuma vaadeldaval hetkel, s. o. kaheksandal ringil. Kõik on sellesse kaasa tõmmatud. Kuid jalgrattad on vaid viiendikul selle sõi-duki saajaist ning ülejäänud neljal viiendikul pole pile-teid enam kellelegi edasi müüa.

Veelgi suuremad linnad, isegi nüüdisaegsed miljonilin-nad küllastuvad kõigest mõni ring hiljem, sest laviini ahelreaktsiooni arvud kasvavad uskumatult kiiresti. Meie arvupüramiidi järgmised read on:

312 500
1 562 500
7 812 500
39 062 500

Seega võib laviin juba 12. ringil haarata endasse kogu riigi elanikkonna. Ja $\frac{4}{5}$ kaasahaaratuist on laviini kor-raldajate poolt petetud.

Kokkuvõttes sunnib firma $\frac{4}{5}$ elanikkonda maksma kinni kauba, mille omastab ülejäänud $\frac{1}{5}$ elanikkonnast; ta teeb neli kodanikku viienda heategijaks. Peale selle soetab firma suure hulga oma kauba tasuta levitajaid. Üks meie kirjanik (I. I. Jassinski) on õigusega nimeta-nud seda afääri vastastikuse tüssamise laviiniks. Selle ettevõtte taha varjuv arvuhiiglane nuhtleb kõiki, kes ei oska arvutuste abil kaitset leida aferistide kallaletungi eest.

62. Autasu. Legendi järgi juhtunud muistses Roomas niisugune lugu.

Väejuht Terentius sooritas keisri käsul võiduka sõjaretkke ning naasis sõjasaagiga Rooma. Pealinna jõudnud, palus ta keisrilt audientsi. Valitseja võttis väejuhi lahkesti vastu, tänaš sõjaliste teenete eest ja pakkus tasuks kõrget kohta Senatis.

Kuid Terentius ei vajanud seda. Ta vastas:

«Ma saavutasin hulgaliselt võite, et tõsta sinu võimsust, valitseja, ja ümbritseda su nimi kuulsusega. Ma ei kartnud surma, ja kui mul oleks elusid mitte üksainus, vaid palju, ohverdaksin need kõik sinu eest. Kuid ma väsin sõdimast, minu noorus on möödunud ning veri jahatunud mu soontes. On saabunud aeg esiisade majas puhkamiseks ja perekonnarõõmudeks.»

«Mida sa, Terentius, mult sooviksid?» küsis keiser.

«Kuula mind heatahtlikult, valitseja. Pikkade sõja-aastate jooksul, niisutades päevast päeva mõõka verega, pole ma saanud mahti raha koguda. Valitseja, olen vaene...»

«Edasi, vapper Terentius!»

«Kui tahad autasustada oma vähenõudlikku sulast,» jätkas julgust saanud Terentius, «siis aidaku sinu heldus mul veeta elupäevi lõpuni rahus ja külluses oma kodukolde juures. Ma ei otsi austust ega kõrget kohta kõikvõimsas Senatis. Soovin eemalduda võimust ja ühiskondlikust elust, et vaikselt puhata. Valitseja, anna mulle raha mu elupäevade kindlustamiseks.»

Legendi järgi oli keiser ihne mees. Ta armastas koguda raha endale ja kulutas seda teiste peale napilt. Väejuhi palve pani ta mõtlema.

«Kui suurest summast arvad sa, Terentius, endale jätkuvat?» küsis ta.

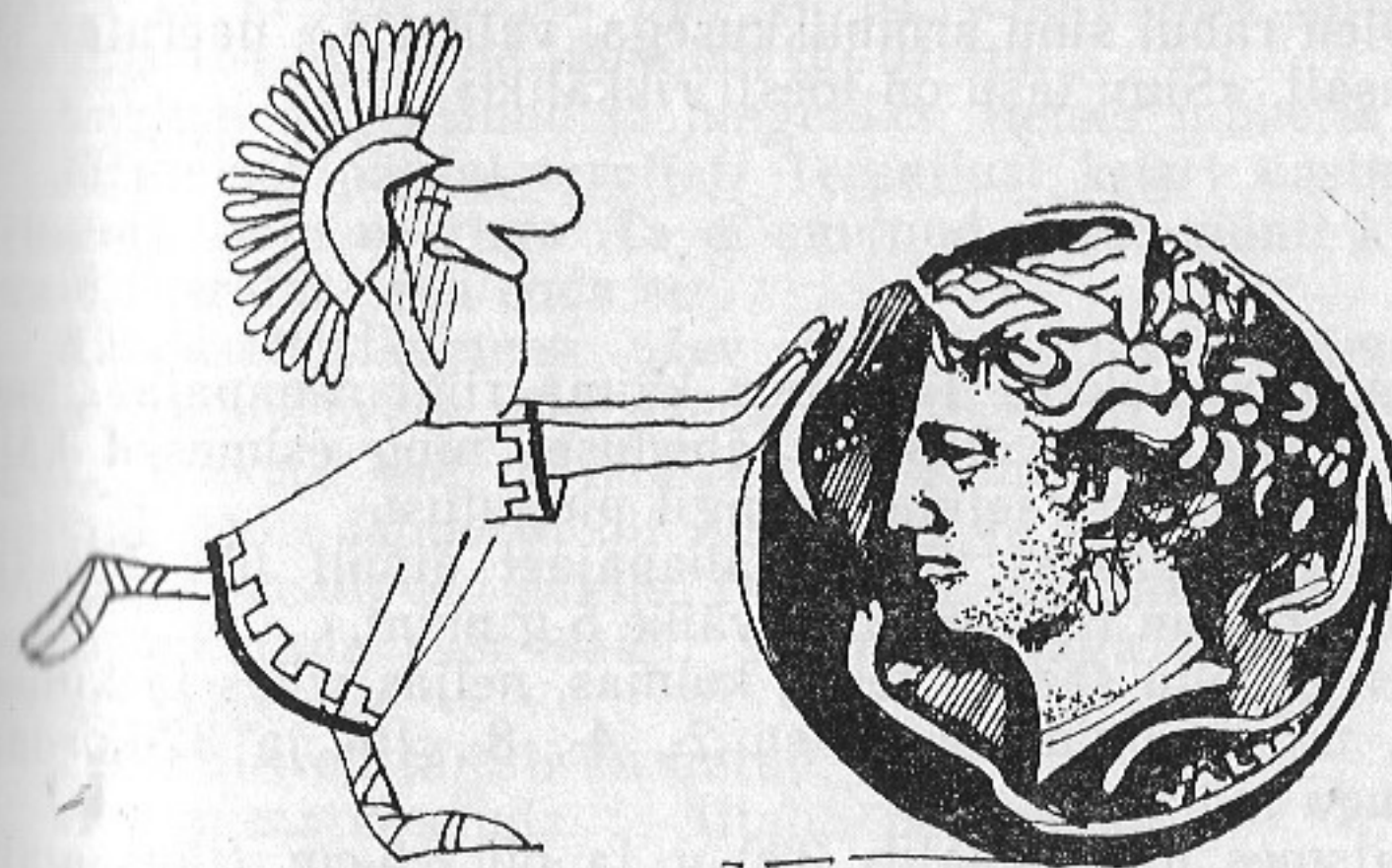
«Miljon denaari, valitseja.»

Uuesti vajus keiser mõttesse. Väejuht ootas langetatud päi. Lõpuks ütles keiser:

«Uljas Terentius. Sa oled hea sõdur ja su kuulsad kangelastood väärivad heldet tasu. Homme keskpäeval kuulled siin mu otsust.» Terentius kummardas ja lahkus.

Järgmisel päeval ilmus väejuht määratud tunnil keisri paleesse.

«Ole tervitatud, vapper Terentius,» ütles keiser.



Joon. 52

Terentius langetas alandlikult pea.

«Valitseja, ma tulin su otsust kuulama. Sa lubasid armulikult mulle tasuda.»

Keiser vastas:

«Ma ei soovi, et sinusugune õilis sõjamees saaks oma vägitegude eest armetu tasu. Kuula siis mind. Minu rahapajas on 5 miljonit vaskbrassi*. Pane nüüd tähele mu sõnu. Sa lähed rahapatta, võtad 1-brassise mündi, tuled siia tagasi ja paned selle mu jälgade ette. Teisel päeval lähed sa uuesti rahapatta, võtad 2-brassise mündi ja paned siia esimese kõrvale. Kolmandal päeval saad 4-brassise, neljandal 8-brassise, viiendal 16-brassise mündi jne., ikka mündi väärtust päevaga kahekordistades. Ma käsin valmistada sinu jaoks iga päev vastavas vääringus münte. Ja niikaua, kuni sul jätkub jõudu mündi tõstmiseks, saad sa mu rahapajast raha. Kellelgi pole õigust sind abistada, pead piirduma oma jõuga. Kui aga näed, et su jaks enam mündile peale ei hakka, peatu: meie leping on lõppenud. Ent kõik rahad, mis sul õnnestub välja tuua, kuuluvad auga sulle.»

Ahnelt kuulas Terentius keisri iga sõna. Talle viirastus tohutu hulk rahapajast saadud münte, üks suurem kui teine.

* 1 denaar = 5 brassi.

«Olen rahul sinu armulikkusega, valitseja,» naeratas ta rõõmsalt. «Sinu tasu on tõesti rikkalik!»

Iga päev hakkas Terentius käima riigi rahapajas. See asus keisri vastuvõtusaali läheduses ning esimesed käigud ei nõudnud väejuhilt mingit pingutust.

Esimesel päeval tõi ta rahapajast ainult ühe brassi. See on 21-mm läbimõõduga väike 5-g münt.

Kerged olid samuti teine, kolmas, neljas, viies ja kuues käik, mil väejuht tõi kaasa 2-, 4-, 8-, 16- ja 32-kordse kaaluga münte.

Seitsmes münt kaalus 320 g ja oli 8,5-cm (täpsemalt 84-mm) läbimõõduga**.

Kaheksandal päeval tuli Terentiusel tuua rahapajast 128-brassine münt. See kaalus 640 g ja oli läbimõõdult umbes 10,5 cm.

Üheksandal päeval tõi Terentius keisrisaali 256-brassise münti. See oli 13-cm läbimõõduga ja kaalus üle 1,25 kg.

Kaheteistkümnendal päeval ulatus münti läbimõõt peaaegu 27 cm-ni ja kaal 10,25 kg-ni.

Seni väejuhti sõbralikult kohelnud keiser ei varjanudki enam oma võidurõõmu. Ta nägi, et tehtud on juba kaksteist käiku, kuid rahapajast on toodud kõigest 2000 väikest vaskraha.

Kolmeteistkümnendal päeval sai vapper Terentius 4096-brassise münti. See oli ligikaudu 34-cm läbimõõduga ja kaalus 20,5 kg.

Neljateistkümnendal päeval tõi Terentius rahapajast 41-kg kaaluga ja umbes 42-cm läbimõõduga münti.

«Ega sa väsinud ole, vapper Terentius?» küsis keiser münt varjates.

«Ei, mu valitseja,» vastas väejuht süngelt, laubalt higi pühkides.

Saabus viieteistkümmes päev. Terentiusel kandam oli seekord raske. Vaevaliselt liikudes tõi ta keisri juurde tohutu 16384-brassise münti. Selle läbimõõt oli 53 cm ja kaal 80 kg — sama palju kui sõduril.

Kuueteistkümnendal päeval tuikus väejuht raskuse all,

* Viiekopikalise münti kaal.

mida ta kandis seljal. See oli 32768-brassine münt ja kaalus 164 kg. Selle läbimõõt oli 67 cm.

Väejuht oli väsinud ja hingeldas. Keiser muheles...

Järgmisel päeval tervitati Terentius keisri vastuvõturuumis valju naeruga. Ta ei suutnud enam münti kanda, vaid veeretask seda enda ees.

Kaheksateistkümmes päev jäi Terentiusel viimaseks rikastumispäevaks. Sel päeval lõppesid tal rahapajaskäigud. Seekord pidi ta kohale toimetama 131072-brassise münti. Selle läbimõõt oli üle meetri ja kaal 655 kg. Oda kangina kasutades suutis Terentius suurima jõupingutusega nihutada raha saali. Suure kolinaga kukkus münt keisri jalge ette.

Terentius oli täiesti kurnatud.

«Enam ma ei suuda... Aitab,» pomises ta.

Vaevaga hoidis keiser tagasi oma rahulolumüet. Kavalus oli täiesti õnnestunud. Ta käskis laekuril arvutada, mitu brassi tõi Terentius vastuvõtusaali.

Laekur täitis käsu ja ütles:

«Valitseja, tänu su heldusele on võidukas sõdur Terentius saanud tasuks 262 143 brassi.»

Nii andis ihne keiser Terentiusel palutud miljonist denaarist peaaegu kakskümmend korda vähem.

* * *

Koos laekuri arvutustega kontrollime ka müntide kaalu. Terentius tõi:

1. päeval	1 brassi kaaluga	5 g
2. päeval	2 brassi kaaluga	10 g
3. päeval	4 brassi kaaluga	20 g
4. päeval	8 brassi kaaluga	40 g
5. päeval	16 brassi kaaluga	80 g
6. päeval	32 brassi kaaluga	160 g
7. päeval	64 brassi kaaluga	320 g
8. päeval	128 brassi kaaluga	640 g
9. päeval	256 brassi kaaluga	1 kg 280 g
10. päeval	512 brassi kaaluga	2 kg 560 g
11. päeval	1024 brassi kaaluga	5 kg 120 g
12. päeval	2048 brassi kaaluga	10 kg 240 g
13. päeval	4096 brassi kaaluga	20 kg 480 g
14. päeval	8192 brassi kaaluga	40 kg 960 g
15. päeval	16384 brassi kaaluga	81 kg 920 g
16. päeval	32768 brassi kaaluga	163 kg 840 g
17. päeval	65072 brassi kaaluga	327 kg 680 g
18. päeval	131072 brassi kaaluga	655 kg 360 g

Me juba teame, kuidas võib hõlpsasti arvutada niisuguse arvujada summa; lk. 70 näidatud reegli järgi on teise tulba summa 262 143. Terentius palus keisrilt miljon denaari, s. o. 5 miljonit brassi. Järelikult sai ta küsitud

$5\,000\,000 : 262\,143 \approx 19$ korda vähem.

63. Legend malelauast. Male on üks iidsemaid mänge. Ta on olemas hulk sajandeid ning pole ime, et temast on legende, mille tõesust on ajalise distantši tõttu raske kontrollida. Tahan jutustada ühe niisuguse legendi. Selle mõistmiseks pole malemängu üldse tarvis osata, piisab teadmisest, et seda mängu mängitakse 64 ruuduks jagatud laual (mustad ja valged ruudud vaheldumisi).

Malemäng leiutati Indias ning sellega tutvudes sattus radža Šeram vaimustusse mängu teravmeelsusest ja malendite asetuvõimaluste mitmekesisusest. Saades teada, et mängu mõtles välja tema alam, kutsus radža ta enda juurde, et õnnestunud leiutise eest tasuda.

Leiutaja, keda hüüti Seta, ilmus valitseja aujärje ette. Ta oli tagasihoidlikult rietatud õpetlane, kes elas õpilaste annetustest.

«Seta, ma tahan sulle suurepärase mängu leiutamise eest väarikalt tasuda,» ütles radža.

Tark kummardas.

«Olen küllalt rikas, täitmaks su julgeimatki soovi,» jätkas valitseja. «Nimeta tasu, mis sind rahuldaks, ja ma annan selle.»

Seta vaikis.

«Ära karda,» julgustas teda radža. «Avalda oma soov. Selle täitmisel pole mul millestki kahju.»

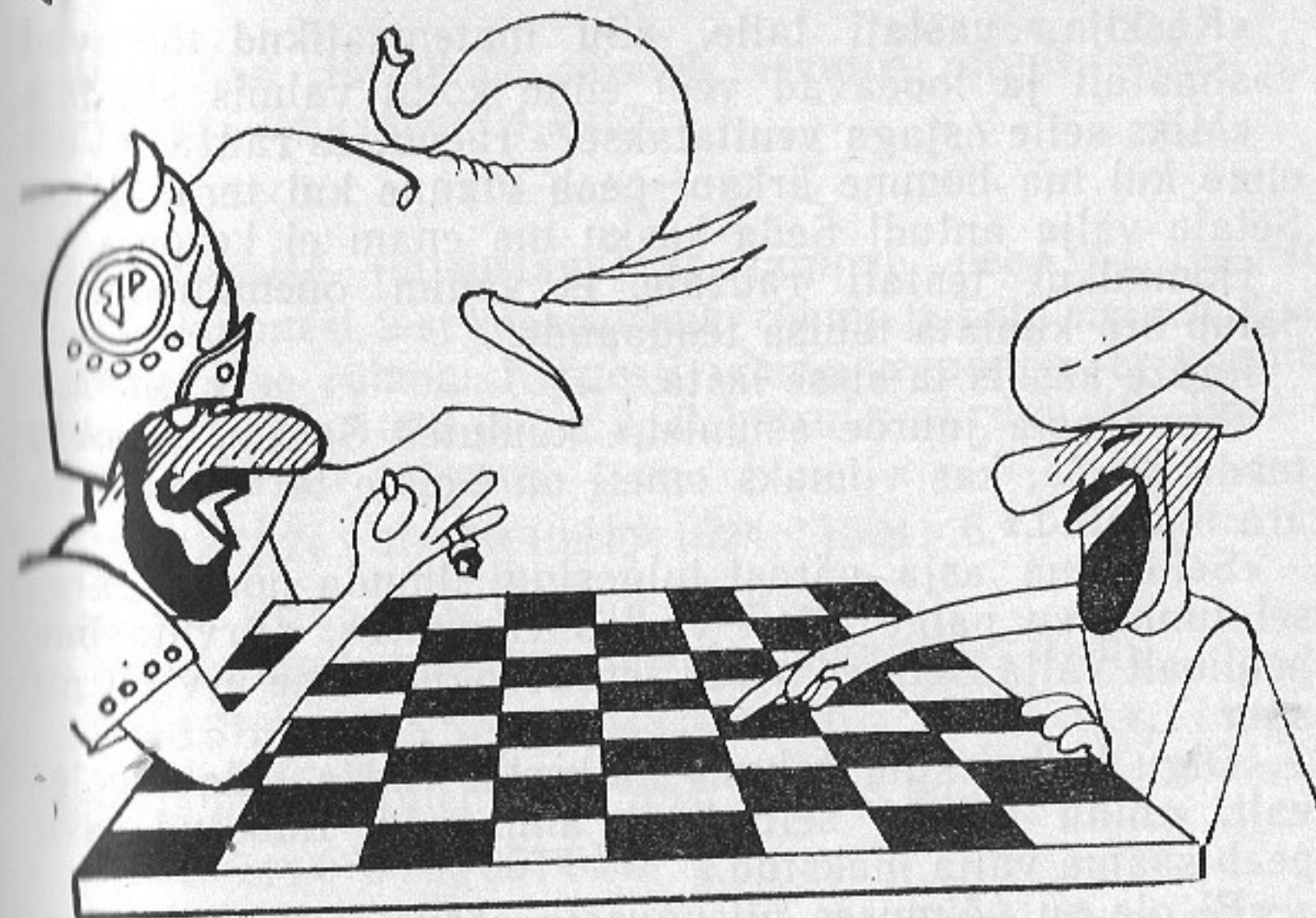
«Sinu headus on ääretu, valitseja. Kuid anna mulle mõtlemisaega. Homme pärast kainet kaalumist teatan sulle oma palve.»

Järgmisel päeval jälle aujärje astmete ette ilmudes üllatas Seta radžat palve vähenõudlikkusega.

«Mu käskija,» ütles Seta, «käsi mulle anda malelaua esimese ruudu eest üks viljatera.»

«Kas tavaline nisutera?» imestas radža.

«Jah, käskija. Teise ruudu eest käsi anda 2 tera, kolmanda eest 4, neljanda eest 8, viienda eest 16, kuuenda eest 32...»



Joon. 53

«Küllalt,» katkestas radža teda ärritatult. «Saad oma viljaterad kõigi 64 ruudu eest, nagu soovid: iga järgmise eest kaks korda rohkem kui eelmise eest. Aga tea, et su palve ei vääri mu heldust. Niisugust tühist tasu paludes halvustad sa lugupidamatusega mu armulikkust. Õpetlasena võiksid anda hoopis paremat eeskujut, kuidas austada valitseja heldust. Mine! Mu teenrid toovad sulle su nisukoti!»

Naeratades lahkus Seta saalist ja jäi palee väravate juures ootama.

Lõunalauas meenus radžale leiutaja ning ta saatis vaatama, kas meelestu Seta on juba ära viinud oma viletsa tasu.

«Valitseja,» oli vastus, «kõik palee matemaatikud arvutavad praegu vajalikku terade kogust.»

Radža süngestus. Ta polnud harjunud, et tema kāske täidetakse nõnda aeglaselt.

Õhtul magama heites küsis radža veel kord, kas Seta on juba oma nisukotiga palee territooriumilt kadunud.

«Käskija,» vastati talle. «Su matemaatikud töötavad väsimatult ja loodavad veel enne koitu valmis saada.»

«Miks selle asjaga venitatakse?» raevutses radža. «Veel enne kui ma homme ärkan, peab viimne kui tera olema Setale välja antud! Seda käsku ma enam ei korda.»

Hommikul teatati radžale, et vanim õuematemaatik palub ära kuulata tähtsa teadaande.

Radža käskis ta sisse lasta.

«Enne asja juurde asumist,» kuulutas Šeram, «soovin teada saada, kas viimaks ometi on Setale ta vilets tasu ära makstud.»

«Sellesama asja pärast julgesingi ilmuda nõnda varasel tunnil su palge ette,» vastas vanamees. «Arvutasime hoolikalt välja Seta soovitud teradekoguse. See arv oli nii suur...»

«Olgu ta kui suur tahes,» katkestas radža teda üleolevalt, «minu salved sellest ei ammendu. Lubatud tasu peab saama välja makstud.»

«Ei ole su võimuses niisuguseid soove täita, valitseja. Kõigis su salvedes pole kokku niisugusel hulgal teri, nagu küsis Seta, pole neid ka terves sinu riigis. Kui soovid tingimata lubadust täita, käsi muuta põldudeks kõik maailma kuningriigid, käsi kuivendada mered ja ookeanid, käsi sulatada kaugeid Põhjala kõrbi kattev jää ja lumi. Saagu kogu see maa üles haritud ja nisu täis külvatud. Kõik see, mis neil põldudel kasvab, käsi anda Setale. Siis saab ta oma tasu.»

Hämmastusega kuulas radža vanuri sõnu.

«Nimeta mulle see koletu arv,» ütles ta mõtlikult.

«Kaheksateist kvintiljonit nelisada nelikümmend kuus kvadriljonit seitsesada nelikümmend neli triljonit seitsükümmend kolm miljardit seitsesada üheksa miljonit viissada viiskümmend üks tuhat kuussada viisteist, oo käskija!»

Nõnda pajatab legend. Pole teada, kas ta räägib tõtt või luiskab, aga selles, et tasu suurust väljendab just see arv, võite veenduda kannatliku arvutamise isegi. Ühest alustades peame liitma arvud 1, 2, 4, 8 jne. 63. kahekordistamise tulemus näitab, kui palju oli leiutajal saada malelaua 64. ruudu eest. 70. leheküljel esitatud seletuse järgi toimides leiame vaevata kogu saadavate terade hulga, kahekordistades viimase arvu ja lahutades

sellest ühe. Järelikult seisneb arvutus ainult selles, et korrutada omavahel 64 kahte:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times \dots (64 \text{ korda}).$$

Arvutamise lihtsustamiseks jagame need 64 tegurit kuude kümnest 2-st koosnevasse rühma ja ühte neljast 2-st koosnevasse rühma. Kergesti võime veenduda, et kümne 2 korrutis on 1024 ja nelja 2 korrutis võrdub 16. Järelikult on otsitav tulemus

$$1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 1024 \times 6.$$

Korrutis 1024×1024 võrdub 1 048 576.

Terade arvu saamiseks peame leidma korrutise

$$1\,048\,576 \times 1\,048\,576 \times 1\,048\,576 \times 16$$

ning lahutama tulemusest ühe. Vastus on:

$$18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

Kui tahate saada ettekujutust selle arvuhiiiglase suuruselt, püüdke leida, kui suurt aita läheb vaja niisuguse teradehulga mahutamiseks. Teadupärast on ühes kuupmeetris 15 miljonit nisutera. Järelikult on male leiutaja tasu mahult 12 000 000 000 000 m³ ehk 12 000 km³. Kui ait oleks 4 m kõrge ja 10 m lai, peaks ta olema 300 miljonit km pikk, s. t. kaks korda pikem Maa ja Päikese vahekaugusest...

Sellise tasu maksmine käis radžale üle jõu. Ent tugeva matemaatikuna vabanenuks ta kergesti võlakoormast — tulnuks vaid lasta Setal ise kõik nisuterad ükshaaval välja noppida.

Tõepoolest, asunuks Seta loendama teri ja teinuks ta seda ööd ja päevad vahetpidamata, loendades sekundis ühe tera, jõudnuks ta esimese ööpäevaga välja lugeda ainult 86 400 tera. Miljoni tera loendamiseks kulunuks 10 ööd-päeva väsimatult vaeva näha. Ühe kuupmeetri nisu oleks ta loendanud umbes poole aastaga. 10 aastat vahetpidamata loendades poleks ta saanud üle 20 m³. Nagu näete, oleks Seta, pühendades loendamisele kõik järelejäänud elupäevad, saanud vaid tühise osa nõutud tasust...

64. Kiire paljunemine. Küps moonipea on täis tillukesi seemneid, millest kõigist võib võrsuda uus taim. Kui palju moone saaksime, kui seemned viimseni idaneksid? Selle teadasaamiseks tuleb loendada kõik seemned ühes kup-

ras. Töö on igav, kuid selle tulemus nõnda huvitav, et tasub vaeva kuhjaga. Selgub, et üks moonikupar sisaldab umbes 3000 seemet.

Mis sellest järeldub? Kui meie moonitaimet ümber oleks küllalt suur tükk sobivat maad, hakkaks iga mahapudenenud seeme idanema ning järgmisel suvel oleks meil juba 3000 mooni. Terve põld ühestainsast kuprast!

Vaatame aga, mis saab edasi. Kõik 3000 taime kasvatavad igaüks vähemalt ühe pea (sageli rohkemgi), mis sisaldab omakorda 3000 seemet. Igast peast võrsub 3000 uut taime ning järelikult on meil järgmisel aastal vähemasti

$$3000 \times 3000 = 9\,000\,000 \text{ taime.}$$

Pole raske rehkendada, et kolmandal aastal on meie moonil juba

$$9\,000\,000 \times 300 = 27\,000\,000\,000 \text{ järeltulijat}$$

ja neljandal aastal

$$27\,000\,000\,000 \times 3000 = 81\,000\,000\,000\,000.$$

Viiendal aastal jääb maakera moonidele kitsaks, sest taimede arv küünib juba

$$81\,000\,000\,000\,000 \times 3000 = 243\,000\,000\,000\,000\,000\text{-ni.}$$

Kogu maismaa pindala, s. o. kõikide mandrite ja saarte pindalade summa, on seevastu kõigest 135 000 000 000 000 km² — umbes 2000 korda vähem, kui vajaksid moonid kasvuks.

Niisiis, kui kõik mooniseemned idaneksid, kataksid üheainsa taime järeltulijad viie aastaga kogu maismaa moonitihnikuga, kus igal ruutmeetril kasvab kuussada taime. Vaat missugune arvuhiiglane peitub ühes tillukeses mooniseemnes!

Sooritades samasuguse arvutuse mõne moonist vähem viljaka taime kohta, jõuame ikkagi sama tulemuseni, kuigi taime järeltulijad katavad Maa viie aasta asemel veidi pikema ajaga. Võtame näiteks võilille, mis annab igal aastal umbes 100 seemet. Kui need kõik idaneksid, oleks neil

1. aastal	1 taim
2. „	100 taime
3. „	10 000 „
4. „	1 000 000 „
5. „	100 000 000 „

6. aastal	10 000 000 000	taime
7. „	1 000 000 000 000	„
8. „	100 000 000 000 000	„
9. „	10 000 000 000 000 000	„

Need taimed nõuaksid kasvupinda, mis 70 korda ületab maismaa pindala. Seega oleks üheksandal aastal kaetud kõik mandrid ja saared võililledega, 70 taime ruutmeetril.

Miks tegelikkuses sellist kohutavalt kiiret paljunemist ei esine? Tohtu suur osa seemneid hukkub idanemata: nad satuvad ebasoodsale pinnasele ega idane üldse, saavad lämmatatud teiste taimede poolt või hävitavad neid loomad. Ent kui seemned ja võrsed ei häviaks massiliselt, kataks iga taim lühikese ajaga terve meie planeedi.

Peale taimede kehtib öeldu ka loomade kohta. Surma puudumisel kataks suvalist liiki loomapaari järglased varem või hiljem kogu Maa. Päratuid maa-alasid tihedasti katvad rändrohutirtsude parved annavad meile mõningase ettekujutuse sellest, mis juhtuks, kui surm ei ohjeldaks eluslooduse paljunemist. Kahe-kolmekümne aastaga kattuksid mandrid läbipääsmatute metsade ja rohtlatega, mis kubiseksid eluruumi pärast lahinguid lõovatest miljonitest loomadest. Ookeanid täituksid tihedasti kaladega, nii et laevasõit muutuks võimatuks. Ohk aga muutuks täiesti läbipaistmatuks lindude ja putukate rohkest. Vaatame, kui kiiresti paljuneb näiteks kõigile tuntud toakärbes. Oletame, et kärbes muneb 120 muna ning suvega kasvab üles seitse kärbsepõlvkonda; pooled putukaist olgu emased. Leidku esimene munemine aset 15. aprillil. Et emakärbes saavutab suguküpsuse 20 päevaga, toimub tema paljunemine nõnda:

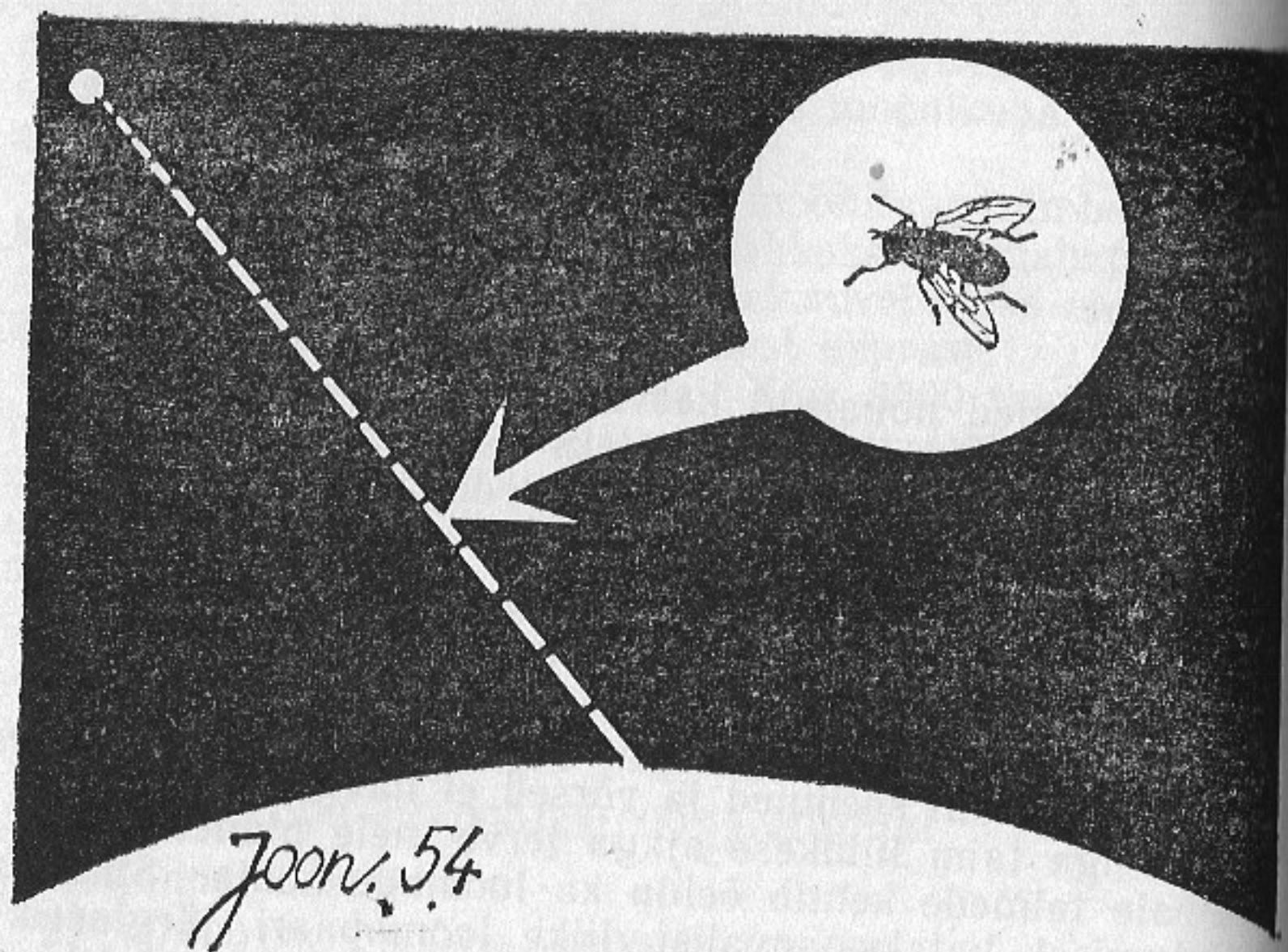
15. aprillil muneb emakärbes 120 muna; mai algul väljub munadest 120 kärbest, neist 60 emast.

5. mail muneb iga emakärbes 120 muna, millest mai keskel tekib $60 \times 120 = 7200$ kärbest, neist 3600 emast.

25. mail muneb igaüks 3600 emakärbest 120 muna, millest juuni alguses tekib $3600 \times 120 = 432\,000$ kärbest, neist 216 000 emast.

14. juunil munevad 216 000 emakärbest 120 muna; juuni lõpul koorub 25 920 000 kärbest, neist 12 960 000 emast.

5. juulil muneb igaüks 12 960 000 emakärbest 120 muna;



juuli keskel koorub 1 555 200 000 kärbest, neist 777 600 000 emast.

25. juulil koorub 93 312 000 000 kärbest, neist 46 656 000 000 emast.

13. augustil koorub munast 5 598 720 000 000 kärbest, neist 2 799 360 000 000 emast.

1. septembril väljub munast 335 923 200 000 000 kärbest.

Et saada paremat ülevaadet sellest hiiglasuurest kärbseshulgast, mis takistamatult paljunedes tekib ühest kärbsesepaarist ainsa suvega, kujutleme neid üksteise järel sirgesse ritta panduna. Et kärbse pikkus on 5 mm, siis veniks see kärbserida 2,5 miljardi km-ni, s. o. 18 korda pikemaks kui Maa kaugus Päikesest. (Ligikaudu nõnda pikk on Maa ja kauge planeedi Uraani vahekaugus.)

Lõpetuseks esitame mõned tõsilood soodsatesse tingimustesse sattunud loomade harukordselt kiirest paljunemisest.

Ameerikas ei olnud algul varblasi. See meil nii tavaline lind viidi Ühendriikidesse sihilikult, et ta hävitaks kahjurputukaid. Teatavasti sööb varblane ohtralt ilu- ja juurviljaaedu kahjustavaid aplaid tõuke ja teisi putukaid.

Uus olukord meeldis varblastele: Ameerikas polnud röövlloomi, kes hävitanuks varblasi; nad hakkasid kiiresti paljunema. Kahjurputukate arv kahanes jõudsalt, kuid peagi sai varblasi nii palju, et elava toidu puudusel asusid nad taimetoidu kallale ja hakkasid laastama põlde.*

Tuli alustada võitlust varblastega. See võitlus läks aga ameeriklastele nii kalliks maksma, et kehtestati seadus, mis keelas edaspidi igasuguste loomade sisseveo Ameerikasse.

Teine näide. Kui eurooplased avastasid Austraalia, polnud seal küülikuid. Küülikud asustati sinna 18. sajandi lõpus, ja et seal küülikutest toituvaid röövlloomi polnud, hakkasid närilised palavikuliselt paljunema. Oige pea ujutasid küülikukarjad üle terve Austraalia, tehes kohutavat kahju põllumajandusele ja muutudes maa tõeliseks nuhtluseks. Kulutati tohutult raha võitluseks selle põllumajanduse nuhtlusega ning hädast õnnestus jagu saada vaid tänu energilistele abinõudele. Umbes sama kordus hiljem küülikutega Californias.

Kolmas õpetlik lugu juhtus Jamaika saarel. Siin leidis hulgaliselt mürkmadusid. Nendest jagu saamiseks otsustati saarele tuua kurgkotkaid, mürkmadude agaraid hävitajaid. Varsti madude arv vähenes, kuid see-eest hakkasid ebatavalise kiirusega paljunema põldrotid, kellest maod olid toitunud. Rotid põhjustasid suhkrurooistandustele suurt kahju, nii et tuli tõsiselt mõelda nende hävitamisele. Teatavasti on india mangust rottide vaenlane. Saarele otsustati tuua neli paari neid loomi ning lasta neil vabalt paljuned. Mangustid kohanesid uuel kodumaal hästi ning levisid kiiresti üle kogu saare. Vähem kui kümne aastaga hävitasid nad rotid peaaegu täielikult. Kahjuks aga hakkasid mangustid pärast rottide hävitamist toituma kõigest, mis ette juhtus: nad mürdsid kanapoegi, kitsetallesid, põrsaid, kodulinde ning sõid nende mune. Üha rohkem paljunedes asusid mangustid viljapuuaedade, viljapõldude ja istanduste kallale. Elanikud hakkasid oma endisi abilisi hävitama, kuid neil õnnestus vaid osaliselt piirata loomade tehtud kahju.

65. Tasuta lõunasöök. Kümme noormeest otsustasid tähistada keskkooli lõpetamist seltsimeheliku lõunasöö-

* Havai saartel tõrjusid nad kõik teised väikesed linnud täiesti välja.

giga restoranis. Kui kõik olid kogunenud ja esimene roog serveeritud, hakati aru pidama selle üle, kuidas laua taha istuda. Ühed soovitasid istuda tähestiku järjekorras, teised vanuse järjekorras, kolmandad panid ette lähtuda õppeedukusest, neljandad kasvust jne. Vaidluse ajal jahatus supp, aga laua taha ei istunud veel kedagi. Neid lepitaskelner, öeldes:

«Mu noored sõbrad, jätke sõnelemine! Istuge lauda, kuidas kellelegi meeldib ja kuulake mind.»

Kõik istusid nagu juhtus. Kelner jätkas:

«Las üks teist paneb kirja, mis järjestuses te praegu istute. Homme tulge uuesti siia lõunastama ja istuge siis teises järjekorras. Ülehomme istuge jälle uues järjestuses jne., kuni olete ära proovinud kõik võimalused. Kui jõuab uuesti kätte kord istuda nii nagu täna, siis — töotan seda pühalikult — hakkan teid kostitama iga päev tasuta kõige valitumate lõunaroogadega.»

Pakkumine meeldis. Otsustati hakata selles restoranis käima iga päev, et kiiremini läbi proovida kõik laudastumise võimalused ning saada tasuta lõunaid.

Ent nad ei jõudnudki ära oodata seda päeva. Mitte selle pärast, et kelner oleks sõna murdnud, vaid lauastumise võimalusi oli lihtsalt väga palju. Neid polnud rohkem ega vähem kui 3 628 800. Hõlpsasti võib rehkendada, et see päevade arv moodustab peaaegu 10 000 aastat!

Vahest te ei usu, et 10 inimest võivad nii mitmel eri viisil lauda istuda? Kontrollige arvutust ise.

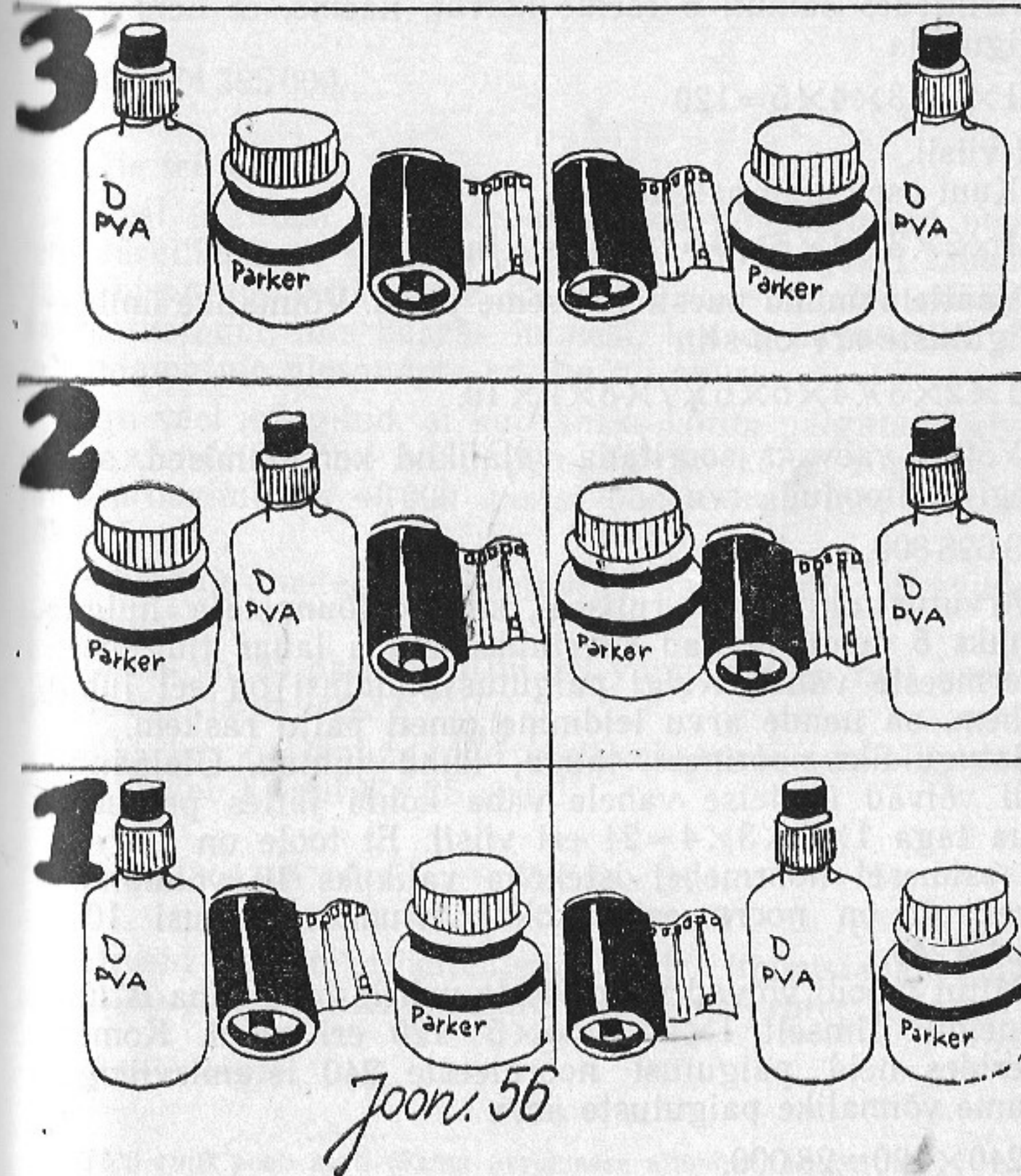
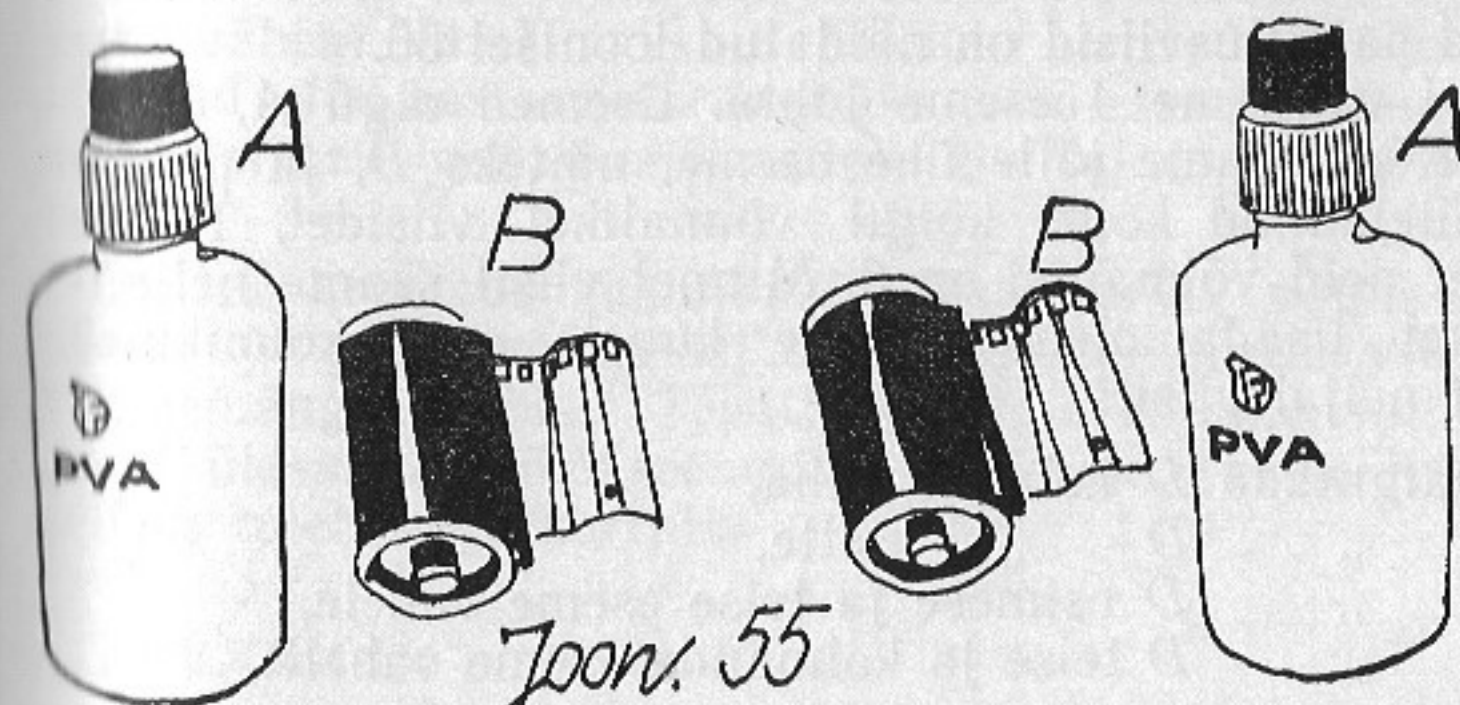
Kõigepealt tuleb õppida ümberpaigutuste arvu määramist. Lihtsuse mõttes alustame kolmest esemest. Nime-tame neid A, B ja C. Soovime leida, mitmel viisil võime neid esemeid üksteise suhtes paigutada. Arutleme nõnda. Kui panna esialgu kõrvale ese C, saab kaht ülejäänut paigutada ainult kahel viisil.

Nüüd lisame eseme C mõlemale neist paaridest. Selleks on kolm võimalust:

- 1) paigutada C paari taha,
- 2) paigutada C paari ette,
- 3) paigutada C esemete vahele.

Muud asendit peale mainitud kolme ei saa esemel C ilmselt olla. Et aga paare on kaks, AB ja BA, siis on paigutuse võimalusi

$$2 \times 3 = 6.$$



Need paigutusviisid on näidatud joonisel 56.

Edasi vaatleme 4 eseme juhtu. Esemel olgu A, B, C ja D . Kõrvaldame jälle ühe eseme, näiteks D , ja paigutame ülejäänud kolm kõigil võimalikel viisidel. Teame juba, et neid võimalusi on 6. Mitmel viisil saame neljandat eset lisada olemasolevale kuuete esemekolmikule? Ilmselt neljal viisil:

- 1) paigutada D kolmiku taha,
- 2) „ „ „ ette,
- 3) „ „ D esimese ja teise eseme vahele,
- 4) „ „ D teise ja kolmanda eseme vahele.

Kokku saame järelikult $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ võimalust.

Arutledes samuti 5 eseme korral, näeme, et neid võib paigutada

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

eri viisil.

Kuut eset saab paigutada

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720 \text{ viisil jne.}$$

Vaatleme nüüd uuesti 10 eseme juhtu. Võimalike ümberpaigutuste arv on siin

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 \times 10.$$

Võttes vaevaks sooritada vajalikud korrutamised, saamegi ülaltoodud arvu

$$3\,628\,800.$$

Arvutus olnuks keerulisem, kui 10 lõunastaja hulgas olnuks 5 neidu ja nad soovinuks istuda lauas tingimata noormeeste vahel. Kuigi paigutusvõimalusi on sel juhul vähem, on nende arvu leidmine ometi palju raskem.

Istugu üks noormees lauda, kuhu juhtub. Ülejäänud neli võivad üksteise vahele vaba kohta jättes paikneda laua taga $1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ eri viisil. Et toole on 10, siis on esimesel noormehel istekoha valikuks 10 võimalust; järelikult on noormeestel kokku istumisvõimalusi $10 \times 24 = 240$.

Mitut moodi võivad noormeeste vahele laua taha istuda 5 neidu? Ilmselt $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ eri viisil. Kombi- neerides neid paigutusi noormeeste 240 istumisviisiga, saame võimalike paigutuste arvu

$$240 \times 120 = 28\,800.$$

See arv on mitu korda väiksem eelmisest ja nõuaks veidi vähem kui 79 aastat. Elanuks noored restoranikül- lastajad 100-aastaseks, saanuks nad tasuta lõuna kui mitte kelnerilt endalt, siis sellelt, kes tulnuks tööle pärast teda.

Osates arvutada ümberpaigutuste arvu, võime nüüd leida, kui palju võimalusi on kivil paikneda viieteist- kümnamängu karbis.* Teisiti öeldes, arvutame, mitu eri- nevat ülesannet võib see mäng pakkuda. Teame juba, et selleks tuleb leida korrutis

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 14 \times 15,$$

Saame

$$1\,307\,674\,365\,000,$$

s. t. üle triljoni.

Sellest üüratust ülesandehulgast on lahendatavad poo- led. Järelikult on selles mängus üle 600 miljardi lahen- damatu paigutusvõimaluse. Osaliselt see seletabki mängu harrastustaudi, mis haaras inimesi, kes ei aimanudki, et lahendamata ülesannete arv on nii suur.

Olgu veel märgitud, et kui läheks korda paigutada kivi uude asendisse ühe sekundiga, kuluks kõigi võimaluste järeleproovimiseks 40 000 aastat ööd-päevad läbi kestvat tööd.

Ümberpaigutustejuhtu lõpetuseks lahendame ülesande koolielust.

Klassis on 25 õpilast. Mitu eri võimalust on neil kooli- pinkidesse istumiseks?

Neile, kes on omandanud ülaltoodu, pole see ülesanne raske. Tuleb korrutada 25 arvu:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times \dots \times 23 \times 24 \times 25.$$

Paljusid matemaatikatehteid saab lihtsustada, kuid antud korrutist mitte. Ei leidu ühtki teist võtet selle kor-

* Tühi ruut peab alati jääma paremasse alumisse nurka.

rutise täpseks* leidmiseks peale kohusetundliku korrutamise. Üksnes tegurite rühmitamisega saab aega mõnevõrra säästa. Korrutis on tohutu 26 numbrist koosnev arv, mille kujutlemine käib meie fantaasiale üle jõu.

15 511 210 043 330 985 984 000 000.

See on suurim kõigist raamatus vaadeldud arvudest ning kannab õigustatult arvuhiiglane nime. Kogu maailma ookeanides ja meredes on veepiisku selle arvuga võrreldes tagasihoidlikul hulgal.

66. Müntide ümbertõstmine. Lapsepõlves näitas vanem vend mulle huvitavat mündimängu. Seadnud kõrvuti kolm alustassi, asetaski ta äärmisele üksteise peale viis münti: kõige alla rublase, sellele 50-kopikalise, siis 20-kopikalise, edasi 15-kopikalise ja kõige peale 10-kopikalise.

«Need mündid tuleb ümber paigutada kolmandale tassile järgmiste reeglite kohaselt: esiteks tohib korrata tõsta üht münti. Teiseks ei tohi kunagi asetada suuremat münti väiksemale. Kolmandaks tohib mündid ajutiselt panna teisele tassile mõlemat eeltoodud reeglit arvestades, kuid mängu lõpuks peavad kõik mündid paiknema kolmandal tassil esialgses järjestuses. Aga nüüd alustage!»

Hakkasin rahasid ümber tõstma. Panin 10-kopikalise kolmandale alustassile, 15-kopikalise keskmisele ja takerdusin. Kuhu panna 20-kopikaline? See on suurem nii 10- kui ka 15-kopikalisest?

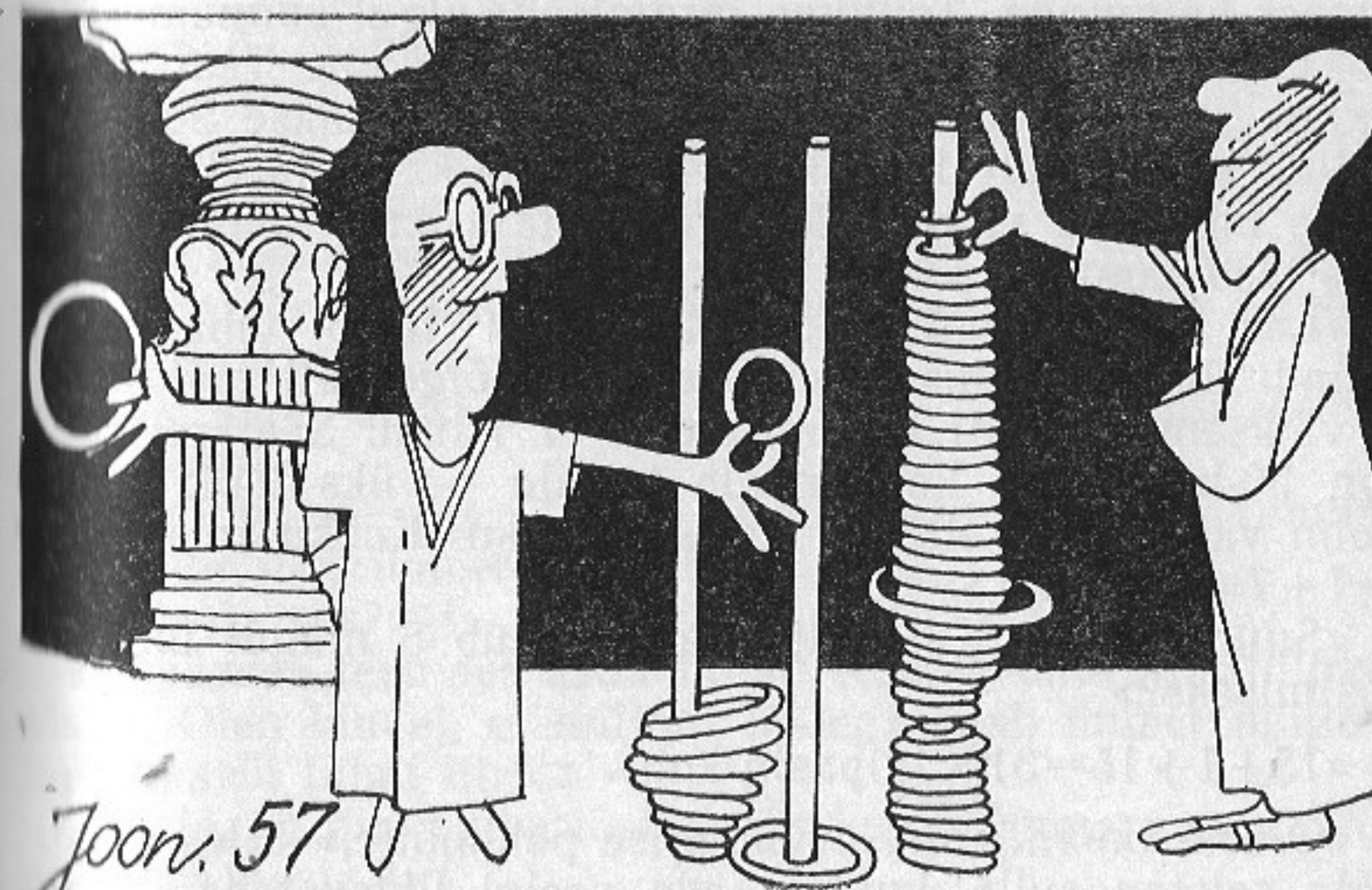
«Mida nüüd teha?» aitas mind vend. «Pane 10-kopika-

* Ligikaudselt on see korrutis muide üsna lihtsasti leitav. Matemaatikas tuleb sageli korrutada kõiki arve 1-st mingi arvuni n . Seda korrutist tähistatakse $n!$ ja nimetatakse n -faktoriaaliks. Näiteks ülaltoodud pikka korrutist saab kirja panna kujul $25!$ Inglise matemaatik Stirling leidis 18. sajandil faktoriaali ligikaudseks arvutamiseks valemi

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

kus $\pi=3,141\dots$ ja $e=2,718\dots$ on arvud, millel matemaatikas on tähtis koht. Stirlingi valemi järgi (võttes appi logaritmi tabeli) võime hõlpsasti leida, et

$$25! \sim 1,55 \cdot 10^{25}.$$



Joon. 57

line keskmisele alustassile 15-kopikalisele peale, siis vabanes kolmas tass 20-kopikalise jaoks.»

Tegingi nõnda, kuid kohe tekkis uus raskus. Kuhu panna 50-kopikaline? Ent peagi taipasin, et nüüd tuleb 10-kopikaline paigutada esimesele alustassile, 15-kopikaline kolmandale ja siis 10-kopikaline ka kolmandale. Nüüd võib 50-kopikalise asetada tühjale keskmisele alustassile. Järgnevalt õnnestus mul rohkete ümbertõstmisega paigutada ka rublane münt ümber esimesele tassile ning lõpuks koguda terve mündivirn uuesti kolmandale taldrikule.

«Mitu ümbertõstmist sa tegid?» küsis mu vend tööd heaks kiites.

«Ma ei loendanud.»

«Arvutame siis. On ju huvitav teada, missugune on vähim ümbertõstmiste arv sihilejõudmiseks. Mitu käiku pidanuks tegema, kui mündivirn oleks koosnenud viie asemel kahest mündist, 15- ja 10-kopikalisest?»

«Kolm. 10-kopikaline keskmisele tassile, 15-kopikaline kolmandale ja seejärel 10-kopikaline kolmandale.»

«Õigus. Lisame veel ühe münti — 20-kopikalise — ja loeme kokku, mitme käiguga saame mündivirna nüüd

ümber paigutada. Toimime järgmiselt: algul kanname üle kaks väiksemat münti keskmisele taldrikule. Teatavasti vajame selleks kolme käiku. Seejärel asetatakse 20-kopikaline kolmandale taldrikule — üks käik. Seejärel paigutame mõlemad mündid keskmiselt taldrikult kolmandale, mis teeb samuti 3 käiku. Kokku $3+1+3=7$.

«Las ma arvutan ise, mitu käiku tuleb teha nelja mündi ümbertõstmiseks,» ütlesin. «Kõigepealt paigutan 3 väiksemat münti keskmisele — 7 käiku. Seejärel tõstan 50-kopikalise kolmandale tassile — üks käik, ning kolm väiksemat sellele — veel 7 käiku. Kokku tuleb $7+1+7=15$ käiku.»

«Suurepärane. Kui palju käike kulub 5 mündi ümbertõstmiseks?»

« $15+1+15=31$,» taipasin kohe.

«Oledki omandanud arvutamise põhimõtte,» ütles vend. «Ma seletan sulle, kuidas seda veelgi lihtsustada. Pane tähele, et 3, 7, 15 ja 31 on kõik 2 astmed, millest on lahutatud 1. Näe!»

Ja vend pani kirja tabeli:

$$3=2 \times 2 - 1$$

$$7=2 \times 2 \times 2 - 1$$

$$15=2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1$$

$$31=2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1$$

«Saan aru, tuleb korrutada niipalju kahtesid, kuipalju münte ümber tõstetakse, ja lahutada tulemusest üks. Nüüd võin leida suvalise mündihulga ümbertõstmiseks vajaliku käikude arvu: näiteks 7 mündi puhul tuleb teha $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 - 1 = 127$ käiku.»

«Noh, oledki sellest iidsest mängust aru saanud. Lisan veel ühe praktilise näpunäite: kui münte on paaritu arv, tuleb esimene münt asetada kolmandale, paarisarvu korral teisele tassile.»

«Sa ütlesid, et see on vana mäng. Kas sa ei mõelnudki seda ise välja?»

«Ei,» vastas vend. «Ma ainult kohandasin selle müntidele. Mäng on väga vana ja kuulu järgi pärit Indiast. Sellest mängust räägitakse huvitavat legendi. Benaresi linnas olnud tempel, kuhu jumal Brahmā seadnud maailma loomise aegu kolm teemantvarrast ja asetanud ühele neist 64 kuldliitrit: alla kõige suurema ja sellele järjest

väiksemad. Templi preestrid peavad neid ööd-päevad väsimatult ühelt vardalt kolmanda abil teisele tõstma, jälgides meie mängu reegleid, võttes korraga ühe litri ja asetades väiksema suuremale. Kui kõik 64 litrit saavad ümber paigutatud, saabuvat legendi järgi maailma lõpp.»

«Oh, selle legendi järgi pidanuks maailm juba ammu olma saama.»

«Kas sinu arust ei võta 64 litri ümberpaigutamine kaua aega?»

«Muidugi ei võta. Tehes käigu sekundis, võib tunnis sooritada 3600 ümbertõstmist.»

«Noh, ja siis?»

«Ööpäevas teeb see sada tuhat. Kümne päevaga miljon tõstet. Olen kindel, et miljoni tõstega saab ümber paigutada kasvõi tuhat litrit.»

«Eksid. 64 litri ümbertõstmiseks kulub ümmarguselt 500 miljardit aastat!»

«Kuidas nii? Tõstete hulk võrdub ju ainult 64 kahe korrutisega miinus üks, ja see on ... Oot-oot, kohe korrutan!»

«Suurepärane. Kuni sa arvutad, jõuan ära käia oma asju õiendamas.»

Vend lahkus, jättes mu süvenema arvutustesse. Algul leidsin 16 kahe korrutise, siis korrutasin tulemuse iseendaga ja saadud arvu uuesti iseendaga. Pärast ei unustanud ma lahutada ühte. Nii sain arvu

18 446 744 073 709 551 615*.

Järelikult oli vennal õigus.

Võib-olla huvitab teid, kui vana on maailm ja elu meie planeedil. Selles suhtes on teadlastel muidugi ainult umbkaudsed andmed:

Päikese vanus on	5 000 000 000 000 aastat
Maa „ „	3 000 000 000 „
Elu Maal „ „	1 000 000 000 „
Inimese „ „ vähemalt	500 000 „

67. Kihlvedu. Puhkekodu sööklas räägiti sündmuste tõenäosuse arvutamisest. Lõunastajate sekka sattunud noor matemaatik võttis kätte vaskraha ja ütles:

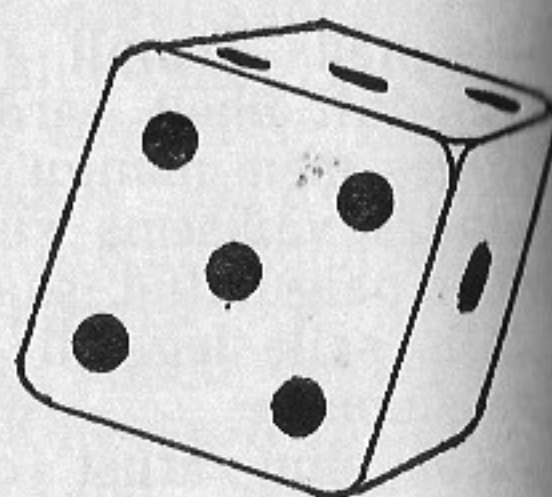
* Lugejale on see arv juba tuttav: see on male leiutaja poolt nõutud tasu.



Joon. 58



Joon. 59



«Viskan selle mündi lauale. Kui suure tõenäosusega kukub ta, vapp ülespoole?»

«Alustuseks selgitage, mida see tõenäosus tähendab, kostis hääli. «See pole kõigile arusaadav.»

«Oh, see on väga lihtne! Münt võib lauale lebama jääda kaheti (joon. 58): vapiga ülespoole või vapiga allapoole. Toimuda võib ainult kaks sündmust, millest meid huvitab üks. Nüüd leiame suhte

$$\frac{\text{soodsate juhusete arv}}{\text{võimalike juhusete arv}} = \frac{1}{2}.$$

Murd $\frac{1}{2}$ väljendabki tõenäosust, et vaskraha kukub vapiga ülespoole.»

«Mündiga on asi lihtne,» sekkus keegi jutuajajamisse. «Vaadelge parem keerukamat juhtu, näiteks täringumängu.»

«Vaatleme pealegi,» nõustus matemaatik. «Täring on kuup, mille igal tahul on numbrid (joon. 59). Millise tõenäosusega tuleb täringuviskel mingi kindel silmade arv, ütleme, kuus? Kui palju on siin võimalikke sündmusi? Et kuup võib jääda lebama igale tahule, siis on võimalusi kuus. Neist huvitab meid ainult üks, mille korral ülemisel tahul on kuus silma. Niisiis saame tõenäosuse, kui jagame ühe kuuega. Seda väljendab murd $\frac{1}{6}$.»

«Kas tõesti võib arvutada kõigi sündmuste tõenäosused?» imestas naispuhkaja. «Kas saab näiteks arvutada koguni, missuguse tõenäosusega möödub siit söökla akna

alt esimesena meesterahvas? Kui suure tõenäosusega võin olla selles kindel?»

«See tõenäosus võrdub ilmselgesti poolega, kui lugeda ka poisid meeste hulka kuuluvaks. Mehi on maailmas sama palju kui naisi.»

«Aga kui suure tõenäosusega on kaks esimest möödijat mehed?» küsis keegi puhkajaist.

«Seda pole palju raskem leida. Loetleme kõik võimalikud juhused. Esiteks on võimalik, et mõlemad möödujad on mehed. Teiseks võib esimene olla mees ja teine naine. Kolmandaks vastupidi: esimene naine ja teine mees. Ja viimaks neljas juhus, mille korral mõlemad möödujad on naised. Niisiis on võimalusi kokku neli ning soodsaks osutub meile neist ainult üks, esimene. Selle tõenäosust väljendab murd $\frac{1}{4}$. Olemegi teie ülesande lahendanud.»

«Selge. Aga küsime nüüd, millise tõenäosusega on kolm esimest möödijat mehed?»

«Ega's midagi, hakkame arvutama. Alustuseks arvame jälle kokku kõik võimalikud juhud. Kahe möödija korral oli neid teatavasti neli. Kolmanda möödija lisamisega võimaluste arv kahekordistub, sest igaühele 4 loetletud möödujate paarile võib lisada mehe või naise. Võimalike juhusete arv on seega $2 \times 4 = 8$. Otsitav tõenäosus on aga ilmselt $\frac{1}{8}$, sest soodus on ainult üks juht. Siin on kerge leida arvutuseeskirja: kahe möödija korral oli tõenäosus $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; kolme korral $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$, nelja möödija korral võrdub tõenäosus $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$ jne. Nagu näete, tõenäosus üha väheneb.»

«Kui suur on see näiteks kümne möödija korral?»

«Kas peate silmas seda, millise tõenäosusega on kümme esimest möödijat meessoost? Tuleb korrutada $\frac{1}{2}$ iseenesest kümme korda. Saame $\frac{1}{1024}$, seega vähem kui tuhandiku. Järelikult, kui te tahate rubla peale kihla vedada, et see juhtub, võin panna välja 1000 rubla selle poolt, et seda ei juhtu.»

«Igati soodus kihlvedu,» kuulutas keegi. «Panen meeleldi välja rubla, et võita tuhandet.»

«Kuid teie šanss on kõigest üks tuhande vastu.»

«See ei loe. Riskin rublaga teie tuhande vastu isegi selle peale, et sada möödijat osutuvad järjest meesteks.»

«Kas te ikka kujutate ette, kui väike on selle tõenäosus?» küsib matemaatik.

«Üks miljondik või midagi selle sarnast, kas jah?»

«Tunduvalt vähem. Üks miljondik on juba selle tõenäo-

sus, et 20 möödujat on mehed. Saja korra tõenäosus on... Andke paberileht. Triljondik... Kvadriljondik... Oeh. Üks kolmekümne nulliga.»

«Kõigest?»

«Kas see arv pole teie jaoks veel küllalt väike? Ookeanis pole niipalju veepiiskugi.»

«Mnjah, see avaldab muljet. Palju te mu rubla vastu välja panete?»

«Ha-ha! Kõik-kõik, mis mul on!»

«Kõik on liiga palju. Mulle piisab jalgrattastki. Te ju ei julge seda välja panna?»

«Miks mitte? Olge lahked! Panen välja jalgratta. Ma ei riski millegagi.»

«Mina samuti. Rubla pole raha. See-eest võin võita jalgratta, aga teie mitte midagi.»

«Saage ometi aru, et olete kindel kaotaja. Jalgratast ei saa te mingil juhul, aga oma rubla võite kohe mulle anda.»

«Mis te teete!» püüdis matemaatikut vaos hoida tema sõber. «Rubla pärast kaotada jalgratta. Hull peast!»

«Vastupidi,» ütles matemaatik. «Hullumeelsus on niisugustel tingimustel rublagi välja panna. Kaotus on ju ette teada. Parema raha juba kohe maha visata.»

«Kuid üks šanss ikkagi on?»

«Tilk vett ookeanis. Kümnes ookeanis! See on teie šanss. Aga minul on kümme ookeani ühe veetilga vastu. Minu võit on kindel nagu ükskordüks.»

«Satute hoogu, noormees,» ütles rahulikult vanamees, kes oli vaidlust vaikides kuulnud. «Satute hoogu...»

«Kuidas nii? Kas siis teie, professor, arutlete samuti argitasandil?»

«Kas te ikka võtsite arvesse, et kõik sündmused pole võrdvõimalikud? Missugust tingimust peavad sündmused rahuldama, et saaks arvutada nende tõenäosust? Need peavad olema võrdvõimalikud. Muide...» ütles vanamees kuulatades, «näib, et tegelikkus selgitab teile teie vea. Kas kuulete sõjaväemuusikat?»

«Mis meil muusikaga pistmist on?...» alustas noormees ja takerdus. Ta näol peegeldus ehmatus. Ta kargas püsti, tõttas akna juurde ja pistis pea õue.

«Ja ongi,» kostis tuppä rusutud hääl. «Kihlvedu on kaotatud. Hüvasti, jalgratas...»

Minuti pärast mõistsid kõik, milles oli asi. Aknast marssis mööda pataljon sõdureid.

68. Arvuhiiglased meie ümber ja meis endis. Arvuhiiglasid ei tarvitse otsida erakordsetest olukordadest. Neid on kõikjal meie ümber ja isegi meie sisemuses, tuleb üksnes osata neid leida. Arvumaailma nähtamatuid hiiglasid on peidus meie kohal taevas, meie jalge all, meid ümbritsevas õhus ja meie soontes voolavas veres.

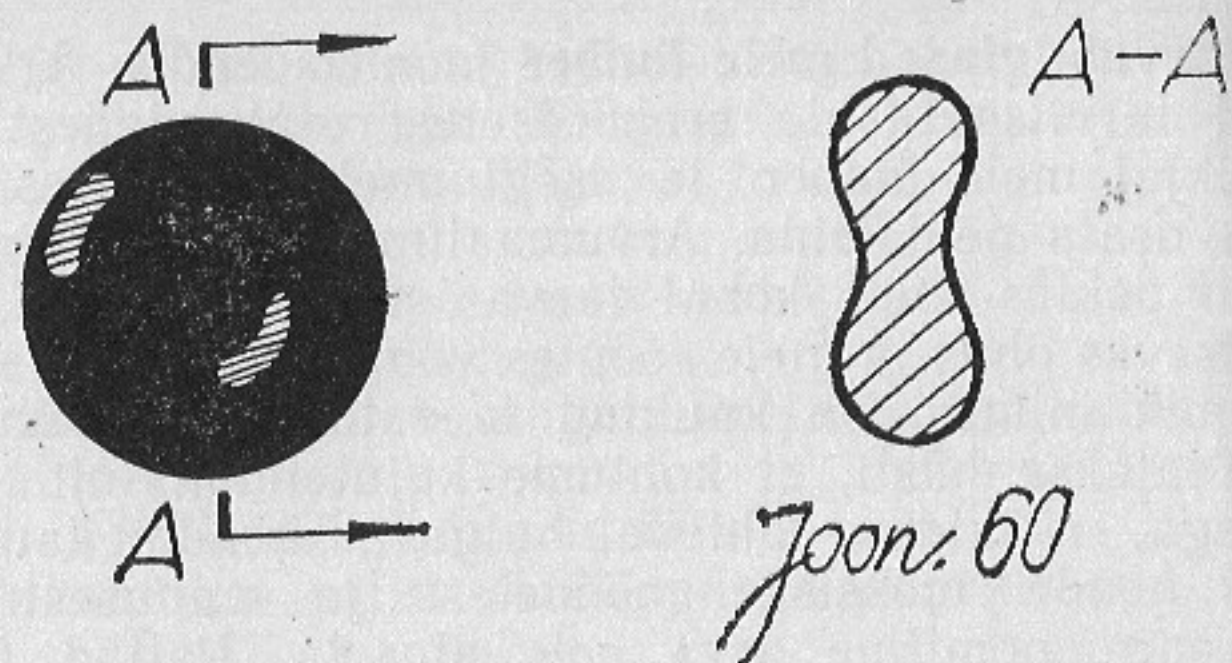
Enamik inimesi on kuulnud taevaalaotuse arvuhiiglastest. Teatakse hästi, et kohtume kujuteldamatult suurte arvudega, rääkides tähtede hulgast, nende kaugusest meist, nende massist, möödetest ja vanusest. Väljend «astronoomiline arv» pole aluseta. Paljud aga ei tea, et maise möödupuuga võrreldes osutuvad hiiglasteks isegi astronoomide meelest väikesed taevakehad. Meie päikesesüsteemis on taevakehi, mida astronoomid nimetavad väikeplaneetideks. Nende seas leidub niisuguseidki, mille läbimõõt on kõigest mõni kilomeeter. Tähistäeva mastaapidega harjunud astronoomi silmis on need kehad kaduvväikesed. Kaduvväikesed on need siiski vaid võrreldes teiste, hoopis suuremate taevakehadega; igapäevaste, harjumuspäraste möödupuude järgi pole nad sugugi miniatuursed. Võtame näiteks tillukese planeedi läbimõõduga 3 km. Geomeetria lubab kergesti leida, et selle planeedi pindala on 28 km² ehk 28 000 000 m². Uhele ruutmeetrile mahub seisma 7 inimest. Nagu näete, leidub 28 000 000 m²-l ruumi 196 000 000 inimesele. Ka liiv, millel me kõnnime, viib meid arvuhiiglaste valda. Ega asjaltult öelda «palju nagu liivateri mere ääres». Muide, vanasti alahinnati liivaterade hulka, arvates, et neid on sama palju kui taevatähti. Vanal ajal teleskoobe polnud, kuid palja silmaga näeme taevas kõigest umbes 3500 tähte (ühel poolkeral). Liivateri on merekaldal miljoneid kordi rohkem.

Suurim arvuhiiglane peitub siiski õhus, mida hingatakse. Iga kuupsentimeeter — sõrmkübaratäis — õhku sisaldab 27 kvintiljonit (s. o. 27 kaheksateistkümne nulliga) pisikest osakest, mida nimetatakse molekulideks.

Selle arvu suurust on võimatu isegi kujutleda. Kui maailmas oleks nii palju inimesi, ei jätkuks meile meie planeedil kohta sõna otseses mõttes. Tõesti, on ju maakera mandrite ja ookeanide pindala kokku 500 000 000 km². Teisendades selle ruutmeetriteks, saame

500 000 000 000 000 m².

Jagades 27 kvintiljonit selle arvuga, saame 54 000. See



tähendab, et maapinna igale ruutmeetrile peaks mahtuma üle 50 000 inimese!

Eespool mainisime, et arvuhiiglased peituvad inimese kehas. Võtame näiteks vere. Vaadeldes verepiiska mikroskoobis, näeme selles tohutul hulgal punaseid liblesid, mis annavad verele värvuse. Kõik need punalibled — erütrotsüüdid — meenutavad kujult keskelt kokkusurutud ümmargusi padjakesi (joon. 60). Kõik nad on ligikaudu ühesuurused, 0,007-mm läbimõõdu ja 0,002-mm paksusega. Ent nende arv on tohutu. Juba pisikeses, 1-mm³ verepiisas on neid 5 000 000. Kui palju on neid terves meie kehas? Vere hulk liitrites on 14 korda väiksem kui inimese kaal kilogrammides. Kui te kaalute 40 kg, on teil verd ligikaudu 3 liitrit ehk 3 000 000 mm³. Aga et iga kuupmillimeeter sisaldab 5 000 000 miljonit erütrotsüüti, siis on nende üldarv

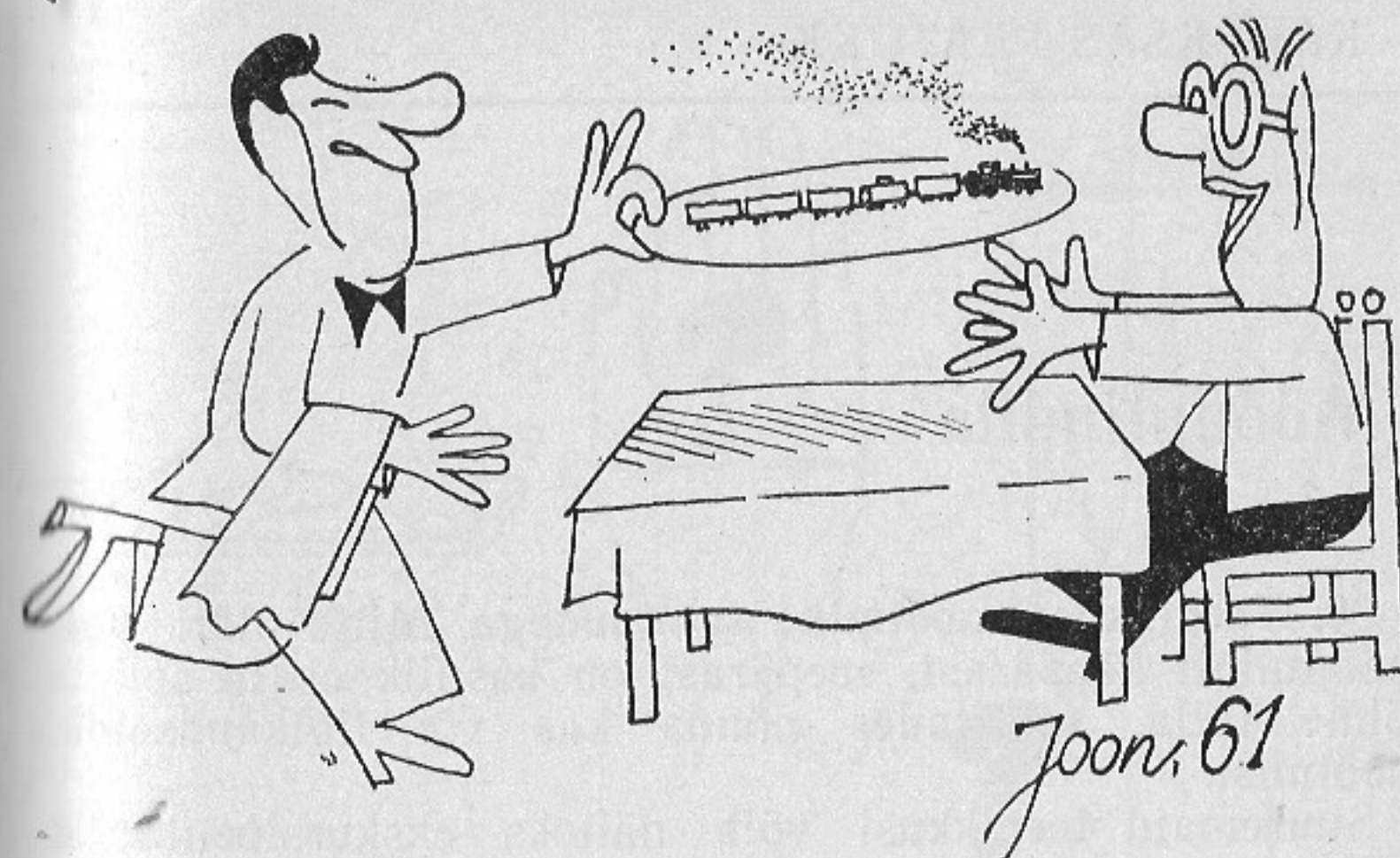
$$5\,000\,000 \times 3\,000\,000 = 15\,000\,000\,000\,000.$$

15 triljonit erütrotsüüti! Kui pikk rivi moodustuks neist libledest, kui need ritta asetada? Hõlpsasti võime leida, et sellise rivi pikkus oleks 105 000 km. Erütrotsüütidest koostatud niit oleks üle 100 000 kilomeetri pikk! Seda võiks mähkida

$$100\,000 : 40\,000 = 2,5$$

korda ümber maakera ekvaatori, aga täiskasvanu erütrotsüütidest koostatud niiti koguni üle 3 korra.

Selgitame, missuguse tähtsusega on meile see pisitiluke verelibele. Nende kehakeste ülesanne on kanda meie



kehas laiali hapnikku. Erütrotsüüdid seovad oma pinnaga hapnikku, kui veri läbib kopsu, ja viivad selle siis kõikjale meie kehas, ka kudedesse, mis asuvad kopsudest kaugel. Erütrotsüütide väiksus hõlbustab selle ülesande täitmist, sest mida väiksem on keha, seda suurem on (kehade tohutu arvu korral) nende kogupindala, aga erütrotsüüt saab hapnikku siduda ainult oma pinnaga. Arvutus näitab, et erütrotsüütide üldpindala ületab tunduvalt inimese keha pindala, olles võrdne 1200 m²-ga. Niisuguse maa-ala hõlmab kopsakas juurviljaaed pikkusega 40 m ja laiussega 30 m. Nüüd mõistate, kui tähtis on organismile, et verelibled oleksid pisikesed ning et neid leiduks tohutul hulgal: nii võivad nad haarata hapnikku pinnaga, mis tuhat korda ületab meie keha pindala.

Õigusega võib arvuhiiglaseks nimetada toidukogust, mida inimene sööb 70 eluaastaga. Nende tonnide vee, leiva, looma- ja linnuliha, kartuli ja teiste juurviljade, tuhandete munade, tuhandete liitrite piima veoks läheks vaja tervet raudteerongi. Joonisel 61 ongi kujutatud see tohutu toiduhulk, mis üle tuhande korra ületab inimese enda kaalu. Ei usuks ju, et inimene suudab sihukese koguse, terve kaubarongitäie, nahka panna. Tõsi, ta ei tee seda korraga, vaid aja jooksul.

Mõõdulindita

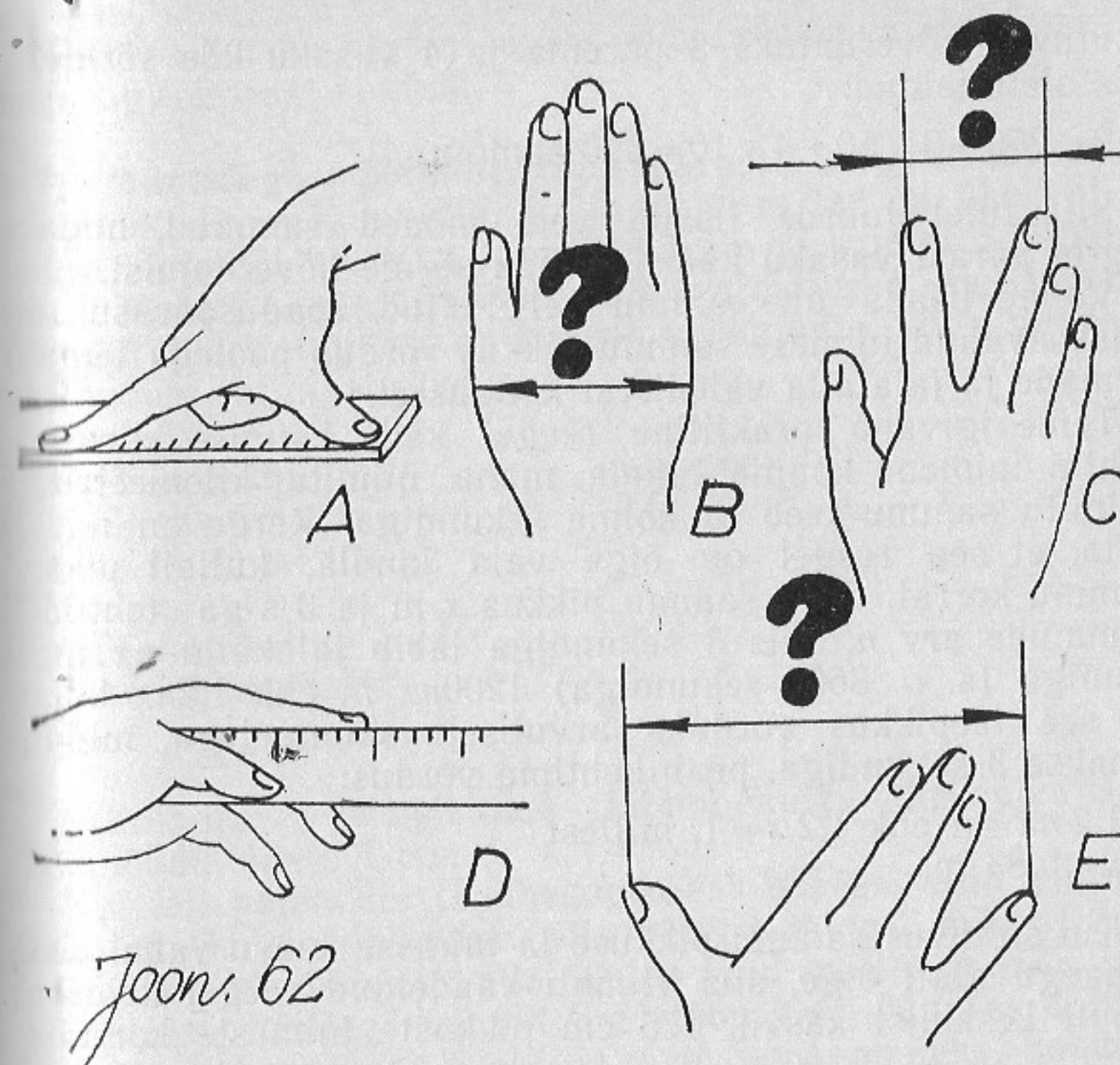
69. Teepikkuse mõõtmine sammudega. Mitte alati pole mõõdulinti käepärast, seepärast on kasulik osata selleta toime tulla, sooritades nõnda kas või ligikaudseidki mõõtmisi.

Suuremaid teepikkusi võib näiteks ekskursiooni ajal mõõta kõige lihtsamini sammudega. Selleks tuleb teada oma sammu pikkust ja osata samme kokku lugeda. Muidugi pole kõik sammud ühepikkused: soovi korral võime teha nii lühikesi kui ka pikki samme. Ent tavalisel käigul teeme siiski ligikaudu ühepikkusi samme, ja teades seda pikkust, võib sammudega mõõta vahemaid suurema veata.

Sammu pikkuse määramiseks peame mõõtma paljude sammude kogupikkuse ja leidma siitkaudu ühe sammu pikkuse. Seda ei saa mõistagi teha mõõdulindita.

Mõõtke tasasel maal 20 meetrit ning läbige see vahemaa tavalise kõnnakuga ning loendage sammud. Võib juhtuda, et samme ei tule täisarv. Sel juhul toimige nõnda. Kui ülejäänud sammuosa on alla poole sammu pikkuse, jätke ta arvestamata; kui ta tuleb üle poole sammu pikkuse, võtke ta arvesse terve sammuna. Jagades teepikkuse 20 m sammude arvuga, saamegi teada sammu pikkuse. See arv tuleb meelde jätta, et vajaduse korral saaks teda kasutada mõõduna.

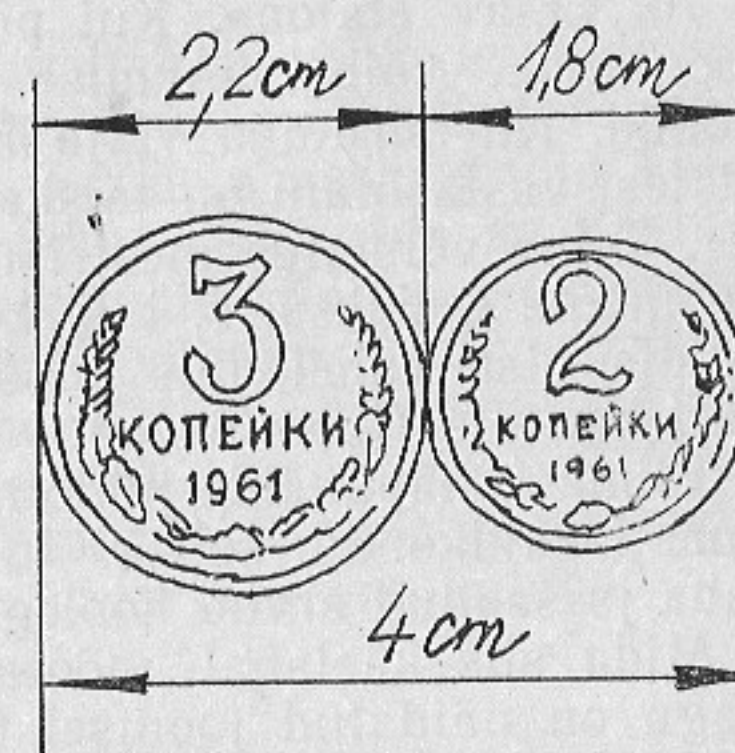
Et sammude arvestamisega mitte sassi minna, võib eriti pika vahemaa korral järgmisel moel arvet pidada. Samme loendatakse ainult kümneni; jõudnud selle arvuni, kõverdatakse üks vasaku käe sõrm. Kui kõik vasaku käe sõrmed on kõverdatud, s. t. on läbitud 50 sammu, kõverdatakse üks parema käe sõrm. Nõnda võib arvet pidada 250-ni, pärast mida alustatakse uuesti, jättes meelde, mitu korda on kokku surutud kõik parema käe sõrmed. Kui pärast mõningase vahemaa läbimist olete kaks korda kõverdanud kõik parema käe sõrmed ja teekonna lõpus



Joon. 62



Joon. 63



Joon. 64

osutuvad kõverdatuks 3 parema ja 4 vasaku käe sõrme, siis olete teinud

$$2 \times 250 + 3 \times 50 + 4 \times 10 = 690 \text{ sammu.}$$

Siia tuleb juurde lisada veel mõned sammud, mida tegite pärast vasaku käe neljanda sõrme kõverdamist.

Võime lisada ühe ammu täheldatud seaduspärasuse: täiskasvanud inimese sammu pikkus võrdub poolega tema silmade ja jalatalla vahelisest kaugusest.

Teine igivana praktiline reegel käib käimise kiiruse kohta: inimene kõnnib tunnis maha niimitu kilomeetrit, kuimitu sammu teeb ta kolme sekundiga. Kerge on mädata, et see reegel on õige vaid kindla, küllalt pika sammu korral. Olgu sammu pikkus x m ja 3 s-ga tehtud sammude arv n . Siis 3 sekundiga läbib jalakäija nx m, tunniga (s. o. 3600 sekundiga) $1200nx$ m ehk $1,2nx$ km. Et see teepikkus võrduks arvuliselt sammudega, mida tehakse 3 sekundiga, peab kehtima võrdus:

$$1,2nx = n \text{ ehk } 1,2x = 1, \text{ millest} \\ x = 0,83 \text{ m.}$$

Kui sõltuvus sammu pikkuse ja inimese kasvu vahel on peaaegu alati õige, siis viimati vaadeldud reegel kehtib ainult keskmist kasvu, 175 cm pikkuste inimeste korral.

70. «Elav etalon». Kui pole käepärast mõõdulinti või joonlauda, võib keskmise suurusega esemeid mõõta nõnda. Kui sirutada välja käsi, siis kaugus selle sõrmetest vastasõlani on täiskasvanud mehel ligikaudu meeter. Teine võimalus meetri umbkaudse pikkuse saamiseks on mõõta 6 vaksa, s. t. 6 korda kaugus nimetissõrme ja põidla otsa vahel, mis on sirutatud teineteisest võimalikult kaugele (joon. 62, a).

Viimane näpunäide juhhib meid tühjade kätega mõõtmise kunsti valdkonda: selleks tuleb vaid üle mõõta oma käelaba ja saadud arvud hoolega meelde jätta.

Mida siis käelabal mõõta? Kõigepealt peopesa laius, nagu on näidatud joonisel 62, b. Täiskasvanutel on see umbes 10 cm. Teil on see võib-olla kitsam. Siis tuleb meelde jätta, kui palju täpselt. Peame ka meeles, kui harali saate ajada keskmise ja nimetissõrme (joon. 62, c). Samuti on kasulik teada nimetissõrme pikkust. Viimaseks mõõtke, kui harali võite ajada põidla ja väikese sõrme (joon. 62, d).

* Nende «elusate etalonidega» võib mõõta väikeste esemete ligilähedast suurust.

71. Müntidega mõõtmine. Suurepäraselt sobivad mõõtevahendiks ka vaskmündid. Paljud vist ei tea, et ühekopikalise läbimõõt on üsna täpselt 1,5 cm ja viiesel 2,5 cm, nii et kõrvuti asetatuna on nende kogulaius 4 cm (joon. 63). Järelikult, kui teil on kaasas vaskmündid, võite nende abil mõõta järgmisi pikkusi:

ühekopikaline	1,5 cm,
viiekopikaline	2,5 „,
kaks ühekopikalist	3 „,
viiekopikaline ja ühekopikaline	4 „,
kaks viiekopikalist	5 „,
jne.	

Lahutades viiekopikalise läbimõõdust ühekopikalise läbimõõdu, saate 1 cm.

Kui teil pole viie- ja ühekopikalist kaasas, vaid ainult kahe- ja kolmekopikaline, siis võivad mingil määral ka need teile hädas abiks olla. Tuleb vaid meeles pidada, et kõrvuti on nendegi laius 4 cm (joon. 64). Murdes 4 cm pikkuse pabeririba pooleks ja veel kord pooleks, saame 4 cm pikkuse mõõdulindi.*

Nagu näete, võib teatud ettevalmistuse ja leidlikkuse korral teostada praktilisi mõõtmisi ka mõõdulindi abita.

Seejuures on kasulik lisada, et meie vaskmündid kõlbavad vajaduse korral peale pikkuse etalonide ka kaaluvihtideks. Uued, kulumata vaskmündid kaaluvad grammides niisama palju, kui on nende väärtus — ühekopikaline 1 g, kahekopikaline 2 g jne. Käibel olnud mündid on veidi kergemad. Aga et igapäevases elus ei ole just tihti käepärast 1–10-grammiseid kaaluvihte, võib äsjamainitud kaaluvahekordade teadmine marjaks ära kuluda.

* Viieteistkümnekopikalise läbimõõt on ligikaudu 2 cm, täpselt aga 19,56 mm. Seejuures vaskmüntide ülaltoodud mõõdud on täpselt õiged. Nihkmõõdiku omanik võib seda hõlpsasti kontrollida.

Geomeetrilised nuputamisülesanded

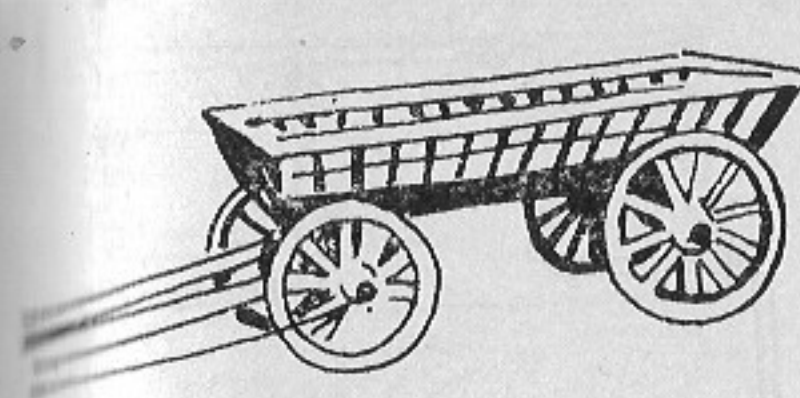
Sellesse peatükki koondatud ülesannete lahendamiseks pole vaja teada kogu geomeetriakursust, vaid piisab geomeetria põhitõdede tundmisest. Kaks tosinat siin pakutavat ülesannet võimaldavad lugejal kontrollida, kas ta tõesti valdab neid geomeetriaalaseid teadmisi, mida ta on õppinud. Geomeetria tõeline tundmine ei seisne sugugi ainult kujundite omaduste üleslugemise oskuses, vaid kunstis rakendada neid omadusi praktiliste ülesannete lahendamisel. Mis kasu on püssist inimesel, kes ei oska lasta?

Kontrolligu nüüd lugeja, mitu täistabamust tal tuleb 24 lasust geomeetriliste märklaudade pihta.

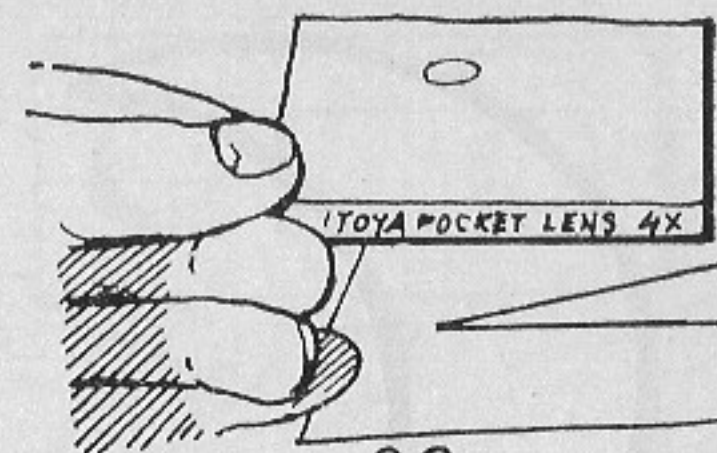
72. Vanker. Miks vankri esitelg kulub ja kuumeneb rohkem kui tagumine? (Joon. 65.)

73. Luubis. Neljakordse suurendusega luubist vaadeldakse $1,5^\circ$ suurust nurka. Kui suur näib nurk (joon. 66)?

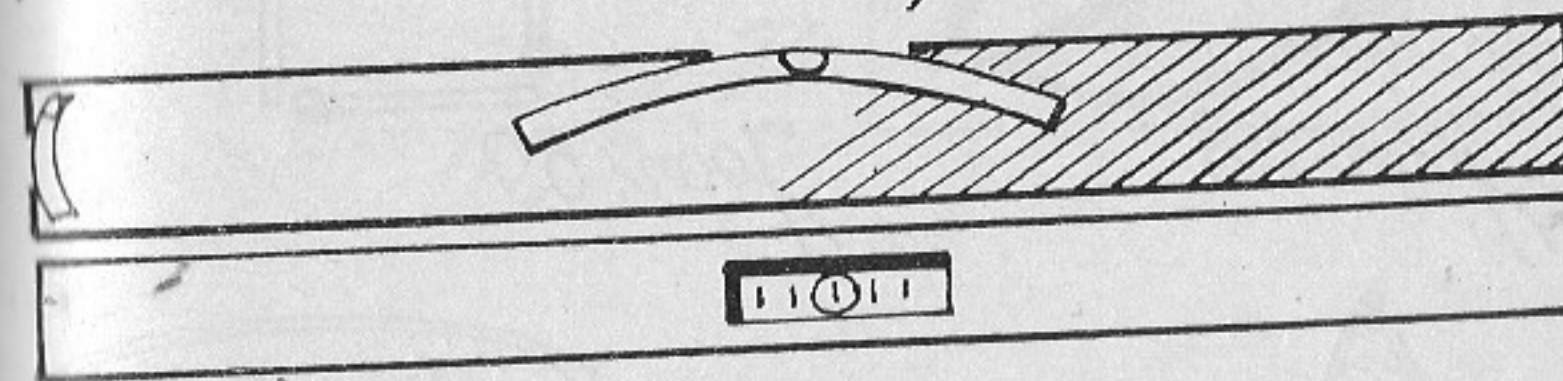
74. Vesilood. Muidugi teate vesiloodi (joon. 67), milles õhumullike hälbib märgist, kui lood asetada kaldpinnale. Mida suurem on kalle, seda rohkem mull hälbib märgist. Mulli liikumise põhjus seisneb selles, et vedelikust kergemana püüab ta tõusta sellest kõrgemale. Kui toru oleks sirge, volksaks mullike vähimagi kalde korral kohe toru otsa. Arusaadavalt oleks siisugust loodi väga ebamugav kasutada. Seepärast tehakse toru kõver, nagu on näidatud joonisel 67. Kui lood on horisontaalpinnal, paikneb mull toru kõrgeimas osas — tema keskel; kui loodi kallutata, pole kõrgeim enam tema keskosa, vaid mingi punkt selle kõrval, ning mull kaldub märgist kõrvale.



Joon. 65



Joon. 66



Joon. 67

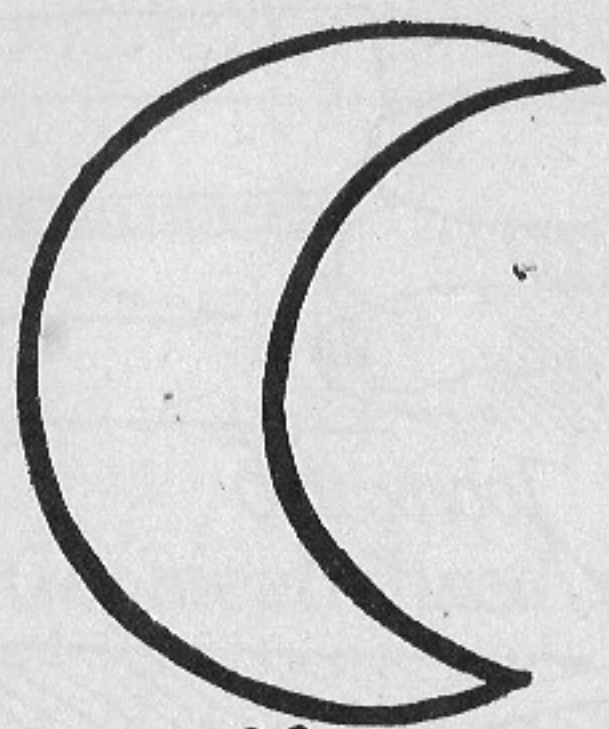
Ülesande küsimus on, mitu millimeetrit hälbib märgist mull, kui loodi kallutada poole kraadi võrra ja toru kaare kõverusraadius on 1 m.

75. Tahkude arv. Pole kahtlust, et see küsimus võib paljudele näida naiivsena või hoopis üleliia keerulisena: mitu tahku on kuuetahtlisel pliiatsil? Enne vastuse järelevaatamist süüvige ülesandesse hooliga.

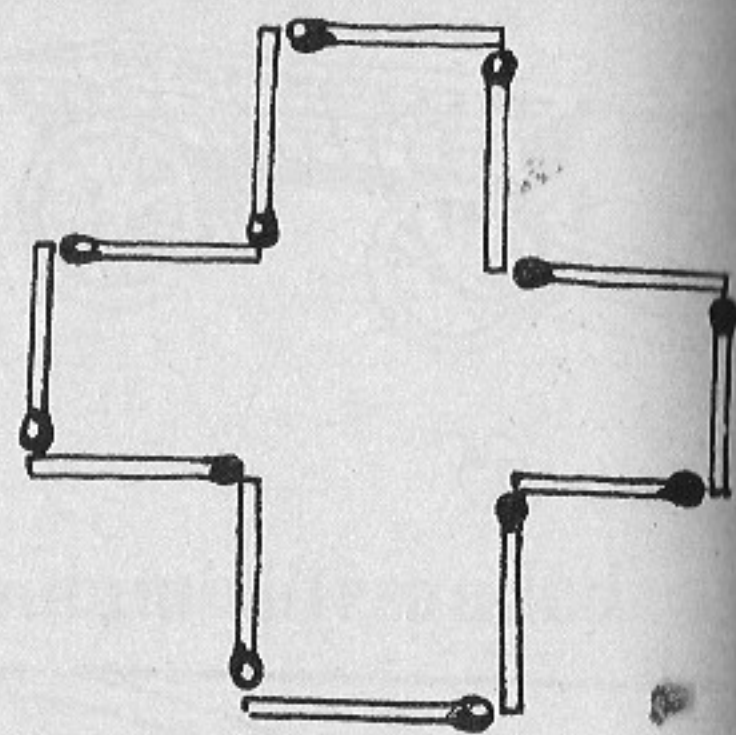
76. Kuusirp. Kuusirp (joon. 68) tuleb kahe sirgega jaotada kuueks osaks. Kuidas seda teha?

77. Kaksteist tikku. Kaheteistkümnest tikust võib koostada ristikujulise kujundi (joon. 69), mille pindala võrdub 5 «ruutikuga».

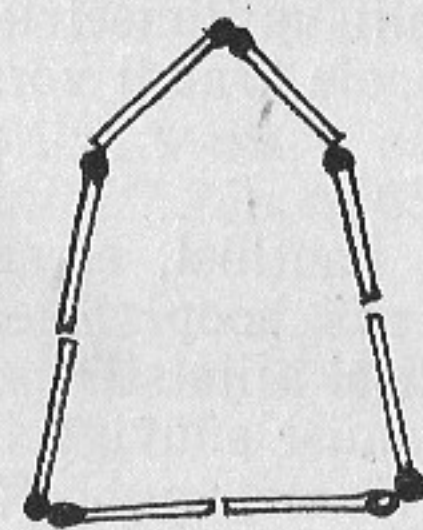
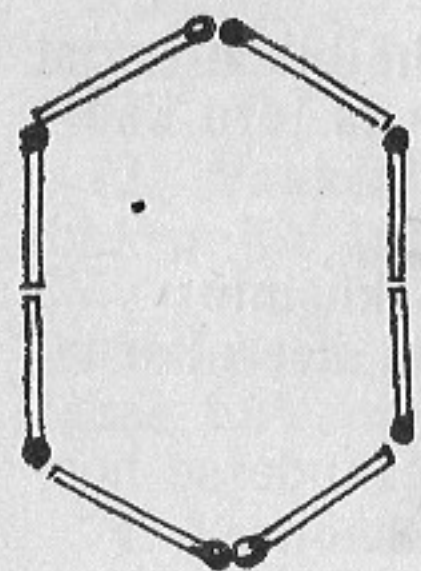
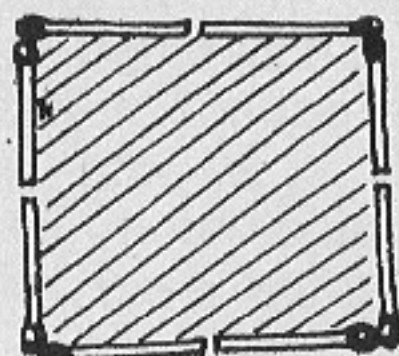
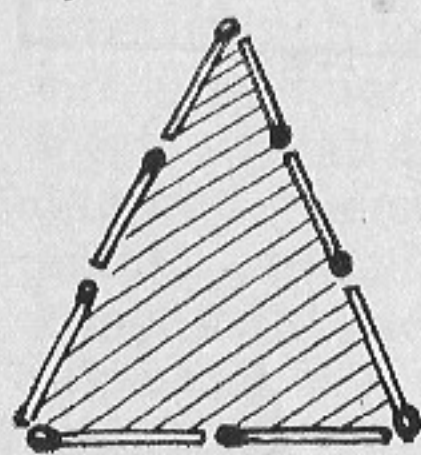
Muutke tikkude asendit, nõnda et tekkinud kujundi pindala oleks ainult 4 «ruutikku». Seda tehes ei tohi kasutada mõõtmisvahendeid.



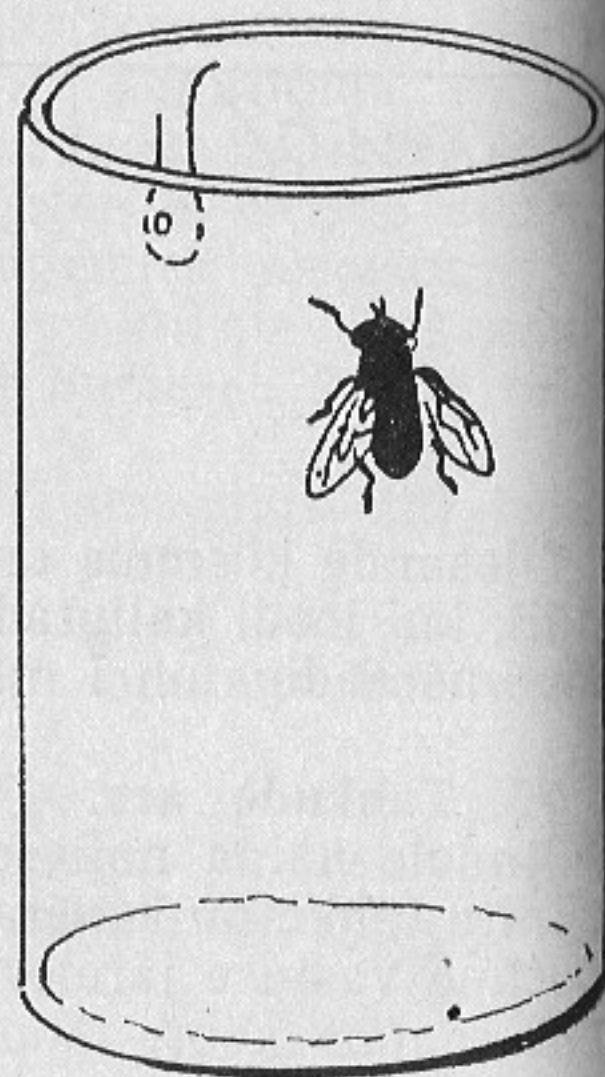
Joon. 68



Joon. 69

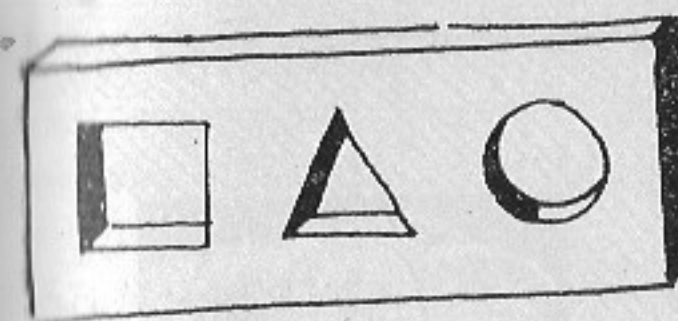


Joon. 70

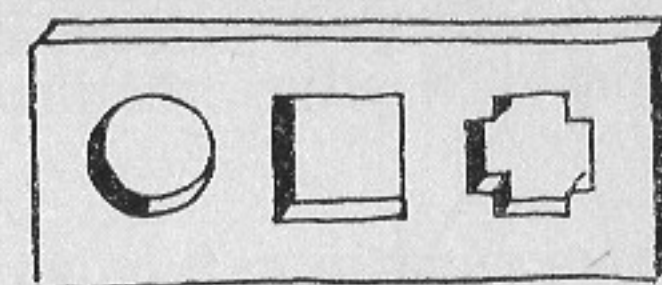


Joon. 71

78. Kaheksa tikku. Kaheksast tikust võib koostada hulganisti kinnisi kujundeid. Mõned neist on esitatud joonisel 70. Nende pindalad on mõistagi erinevad. Moodustage 8 tikust suurima pindalaga kujund.

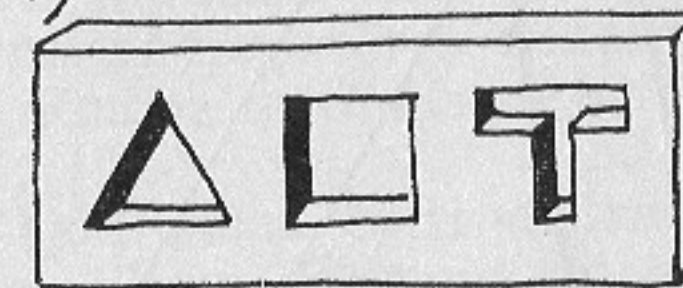


Joon. 72



Joon. 73

Joon. 74



79. Kärbse teekond. Silindrilise klaaspurgi sisepinnal, selle ülaservast 3 cm madalamal, on meetilk. Diameetraalses punktis purgi välispinnal istub kärbes (joon. 71).

Näidake kärbsele ette lühim teekond, mida mööda ta võib jõuda meetilgani.

Purgi kõrgus on 20 cm ja diameeter 10 cm.

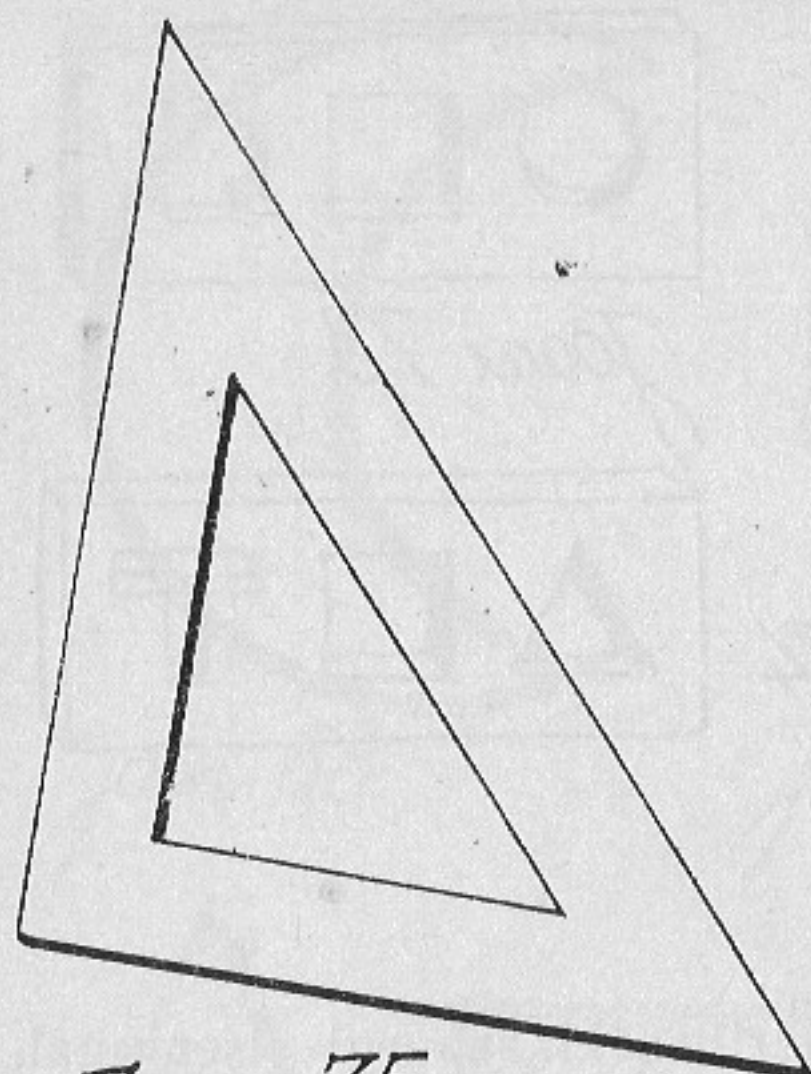
Ärge lootkegi, et kärbes tuleb ülesandega ise toime: selleks läheb vaja geomeetriaalaseid teadmisi, mida pisike putukapea ei mahuta.

80. Leida punn. Meil on tahvlike kolme avausega (joon. 72), millest üks on ruudu-, teine kolmnurga- ja kolmas ringikujuline. Kas leidub niisuguse kujuga punn, millega saab sulgeda kõik kolm avaust?

81. Teine punn. Kui olete toime tulnud eelmise ülesandega, läheb teil võib-olla korda leida ka teine punn avaustele, mis on kujutatud joonisel 73.

82. Kolmas punn. Lõpetuseks veel üks sama laadi ülesanne: kas on olemas punn, mis sulgeb joonisel 74 kujutatud avaused?

83. Viiekopikaline. Muretsege endale viie- ja kahekopikaline. Joonistage paberilehele täpselt kahekopikalise suurune ringjoon ja lõigake see korralikult välja.



Joon. 75.



Joon. 76

Kas teie meelest võib viiekopikaline mahtuda läbi tekinud avause?

Küsimus pole esitatud altvedamiseks, ülesanne on läbinisti geomeetiline.

84. Torn kõrgus. Teie linnas on vaatamisväärsus, torn, mille kõrgust te ei tea. Ent teil on torni ülesvõttega postkaart. Kuidas saab selle abil leida torni kõrgust?

85. Sarnased kujundid. See ülesanne on mõeldud nendele, kes on tuttavad sarnasuse mõistega geomeetrias. Küsitakse:

1. Kas joonestuskolmnurga (joon. 75) sisemine ja välimine kolmnurk on sarnased?

2. Kas pildiraami (joon. 76) sisemine ja välimine nelinurk on sarnased?

86. Juhtme vari. Kui kaugele paistab päikesepaistelise ilmaga 4-mm diameetriga telegraafijuhtme täisvari?

87. Mängutellis. Ehitustellis kaalub 4 kg. Kui palju kaalub samast materjalist mängutellis, mille kõik mõõtmised on 4 korda väiksemad?

88. Gigant ja liliput. Mitu korda on 2 m pikkune gigant raskem 1 m pikkusest liliputist?

89. Kaks arbuusi. Kolhoositurul müüakse kaht eri suurusega arbuusi. Üks neist on neljandiku võrra paksem, kuid maksab 1,5 korda rohkem. Kumba on tulusam osta?

90. Kaks melonit. Müüakse kaht sama sorti melonit. Ohe ümbermõõt on 60 cm, teisel 50 cm. Esimene on 1,5 korda kallim. Kumba on tulusam osta?

91. Kirss. Kirsikivi kattev viljakeha on umbes sama paks kui kivigi. Oletame, et kirss ja kivi on mõlemad kerakujulised. Kas oskate peast öelda, mitu korda on viljakeha ruumala suurem kivi omast?

92. Eiffeli torni mudel. 300 m kõrgune Eiffeli torn Pariisis on tervikuna terasest, mida kulus tema valmistamiseks umbkaudu 8 000 000 kg. Ma soovin tellida torni mudelit, mis kaaluks kõigest 1 kg.

Kui kõrge see tuleb? Kas teeklaasist madalam või kõrgem?

93. Kaks potti. Kaks vaskpotti on täpselt ühesuguse kuju ja ühepaksuste seintega. Esimene mahutab teisest 8 korda enam. Mitu korda on ta esimesest raskem?

94. Pakase käes. Pakase käes seisavad täiskasvanu ja laps, mõlemad ühtmoodi riides. Kumb külmetab rohkem?

Nuputamisülesannete 72—94 vastused

72. Esimesel pilgul ei tundu ülesanne üldsegi olevat geomeetria. Kuid geomeetria valdamine seisnebki geomeetriliste seoste leidmises seal, kus nad on varjatud kõrvaliste üksikasjadega. See on kahtlemata geomeetria ülesanne; geomeetria tundmata seda ei lahenda. Miks siis ikkagi kulub vankri esitelg rohkem? Kõik tea-

vad, et esirattad on tagumistest väiksemad. Ühel ja samal teepikkusel pöörleb väike ring suurest rohkem: tal on väiksem ümbermõõt, mis mahub antud teepikkusesse rohkem arv kordi. Nüüd on arusaadav, miks vankri esirattad teevad tagumistest rohkem pöördeid ning mõistagi kulutavad ka telge enam.

73. Olete vael teel, arvates, et luubis näib nurk $4 \times 1,5^\circ = 6^\circ$ -se nurgana. Suurendusklaasiga vaatlemisel nurga suurus ei muutu. Nurgale vastava kaare pikkus, tõsi küll, suureneb, aga sama arv kordi kasvab ka kaare raadius, nii et kesknurk ise jääb samaks. Joonis 77 selgitab öeldut.

74. Vaadeldge joonist 78, kus MAN on loodi esialgne asend ja $M'BN'$ tema asend pärast kallutamist $\frac{1}{2}^\circ$ võrra. Mõlemad asendid on valitud nõnda, et mull, mis algul oli punktis A , jääks sinna paigale, kuid kaare MN keskkohk nihkuks punkti B . Tuleb leida kaare AB pikkus, kui tema raadius on 1 m ja temale vastav nurk $\frac{1}{2}^\circ$ (see järeldub ristuvate haaradega teravnurkade võrdsusest).

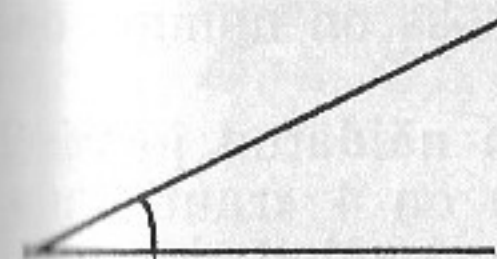
Arvutus pole raske. 1-m (1000-mm) raadiusega ringjoone pikkus on $2 \times 3,14 \times 1000 = 6280$ mm. Et ringjoone on 360° ehk 720 poolkraadi, siis on poolele kraadile vastava kaare pikkus

$$6280 : 720 = 8,7 \text{ mm.}$$

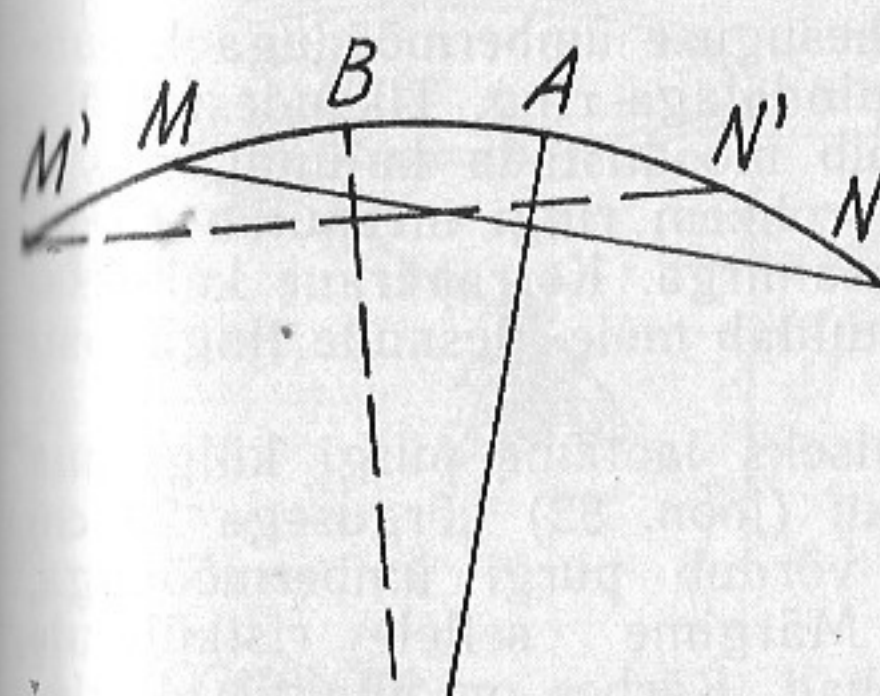
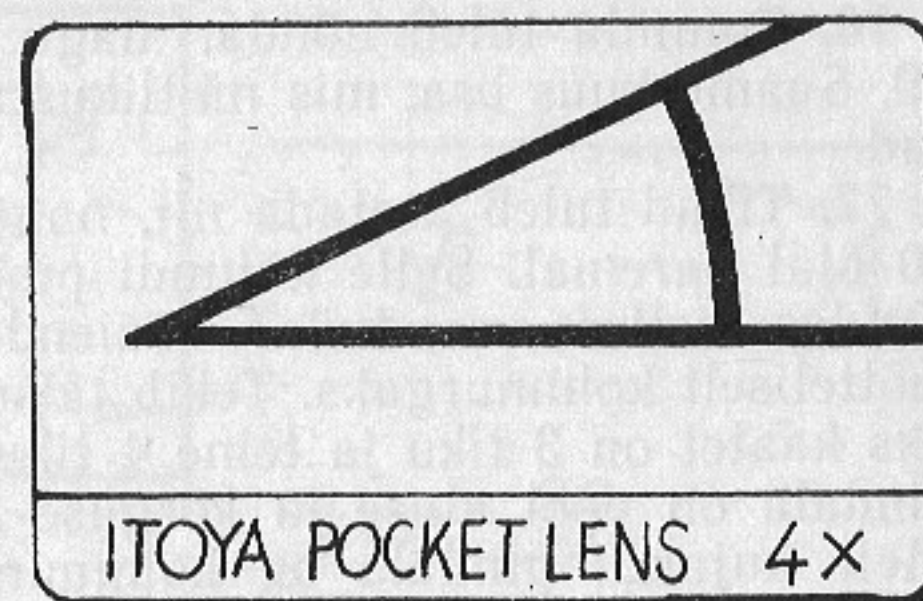
Mull hälbib märgist ligi 9 mm — peaaegu 1 cm. Kerge on näha, et lood on seda tundlikum, mida suurem on tema toru kõverusraadius.

75. See pole sugugi naljaülesanne, meie argikeel on lihtsalt ekslik. Kuuetahtlisel pliiatsil ei ole üldsegi 6 tahku, nagu tõenäoliselt arvab enamik inimesi. Tahke on tal — muidugi juhul, kui ta pole teritatud — kaheksa: kuus külgtahku ja veel kaks väikest otsatahku. Kui pliiatsil oleks kuus tahku, peaks ta olema hoopis neljakandiline — neli külge- ja kaks otsatahku.

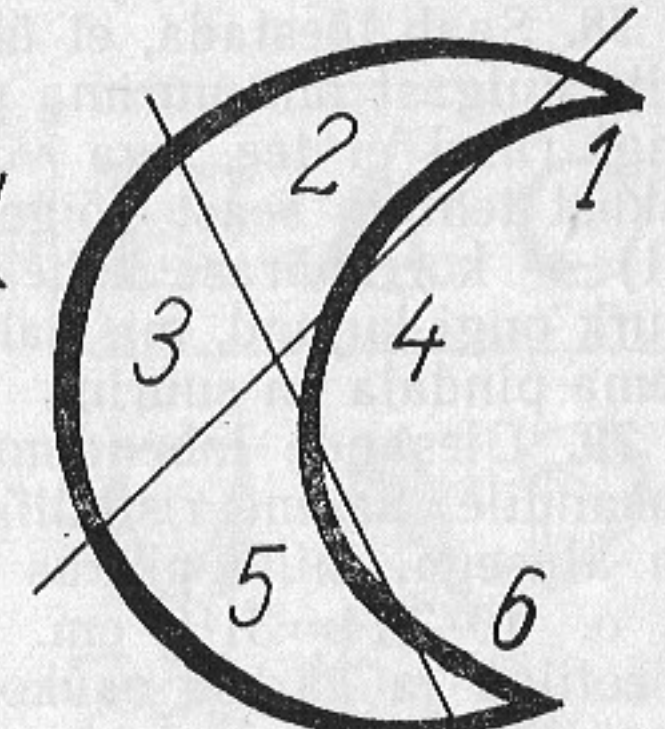
Harjumus loendada prismadel ainult külgtahke on väga levinud. Öeldakse: kolmetahuline prisma, neljatahuline prisma jne., kuna tegelikult tuleks neid prismsid nimetada põhja kuju järgi kolmnurkseteks, nelinurkseteks jne. Kolmetahulist prisma, s. t. kolmest tahust koosnevat prisma, pole olemas. Ka pliiatsit, millest meil juttu oli, oleks õigem nimetada kuusnurkseks, mitte kuuetahtliseks.



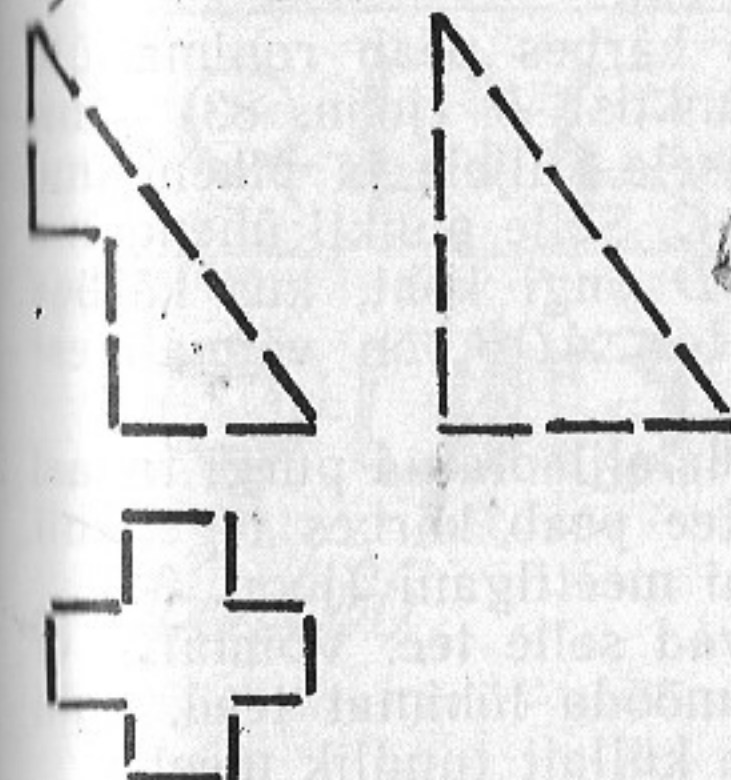
Joon. 77



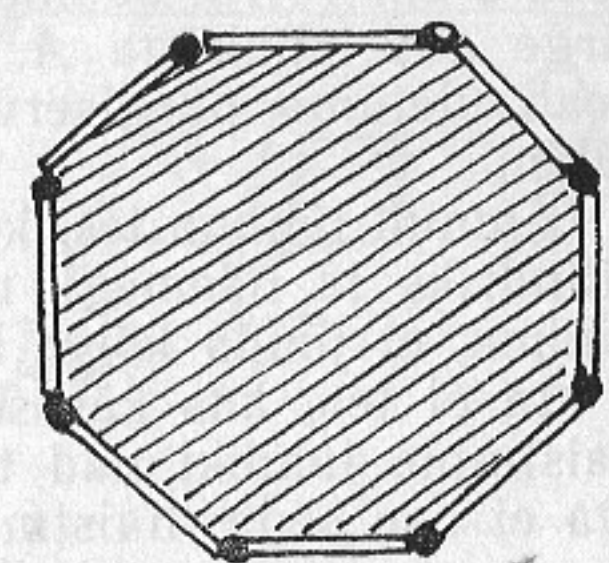
Joon. 78



Joon. 79



Joon. 80



Joon. 81

76. Toimida tuleb nõnda, nagu on kujutatud joonisel 79. Saame kuus osa, mis näitlikustamiseks on nummerdatud.

77. Tikud tuleb asetada nii, nagu on näidatud joonisel 80 ülal paremal. Selle kujundi pindala on 4 «ruutikku». Kuidas selles veenduda? Täiendame saadud kujundit mõtteliselt kolmnurgaks. Tekib täisnurkne kolmnurk, mille üks kaatet on 3 tiku ja teine 4 tiku pikkune.* Kolmnurga pindala on pool aluse ja kõrguse korrutist: $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6$. Meie kujundi pindala on kolmnurga pindalast 2 «ruutikku» võrra väiksem, järelikult 4 «ruutikku».

78. Saab tõestada, et ühesuguse ümbermõõduga kujundite hulgast on suurima pindalaga ring. Tikkudest mõistagi ringi ei tee, aga võib moodustada kujundi, mis 8 tikust tehtute seast kõige rohkem ringi meenutab (joon. 81) — korrapärase kaheksanurga. Korrapärane kaheksanurk ongi kujund, mis rahuldab meie ülesande tingimust: tema pindala on suurim.

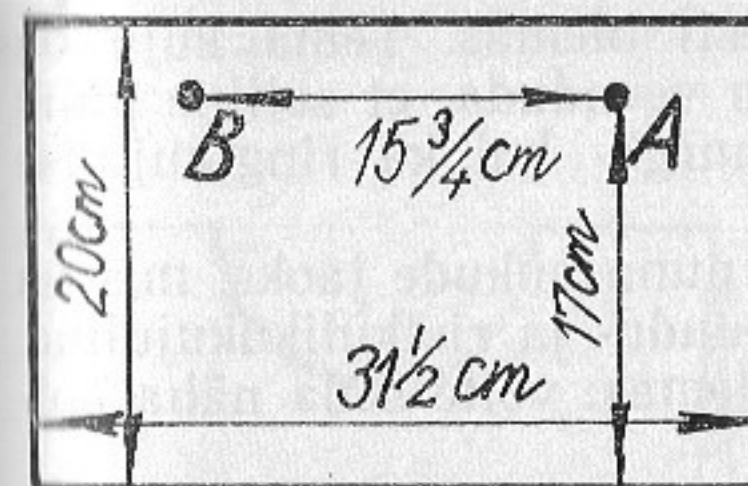
79. Ülesande lahendamiseks laotame purgi külgsinna tasandile. Saame ristküliku (joon. 82) kõrgusega 20 cm ja alusega, mille pikkus võrdub purgi ümbermõõduga, s. o. $10 \cdot 3,14 = 31\frac{1}{2}$ cm. Märgive sellele ristkülikule meetilga ja kärbsse asukohad. Kärbes on punktis A alusest 17 cm kõrgusel ja meepiisk punktis B alusest samal kõrgusel. Punktide A ja B vahekaugus võrdub poolega purgi ümbermõõdust, s. o. $15\frac{3}{4}$ cm.

Selleks, et leida punkti, kus kärbes peab ronima üle purgiserva, toimime nõnda. Punktist B (joon. 83) tõmbame ristlõigu ristküliku ülemisele küljele ja pikendame seda 3 cm võrra: saame punkti C. Selle punkti ühendame sirge abil punktiga A. Punkt D ongi koht, kus kärbes peab ületama purgiserva, ja tee ADB on võimalikest lühim.

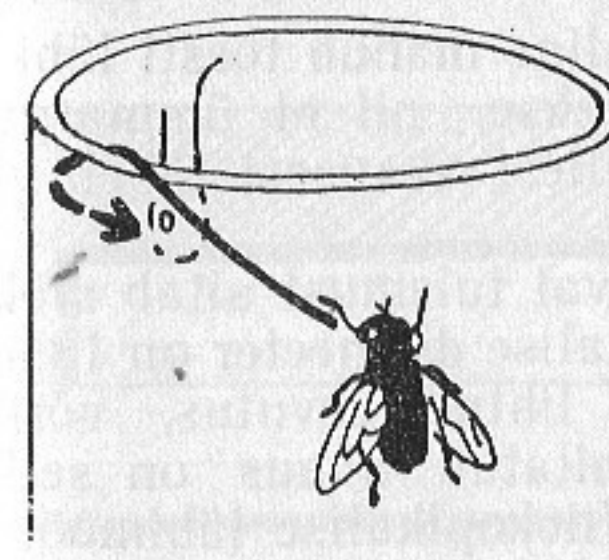
Leidnud lühima tee, keerame laialilaotatud purgi tagasi silindriks ja näemegi, millise tee peab kärbes tegelikult läbima, et jõuda kõige kiiremini meetilgani (joon. 84).

Ma ei tea, kas kärbsed valivad selle tee. Võimalik, et haistmine juhibki nad toiduni mööda lühimat teed, kuid ma ei usu seda: haistmine pole küllalt tundlik meel.

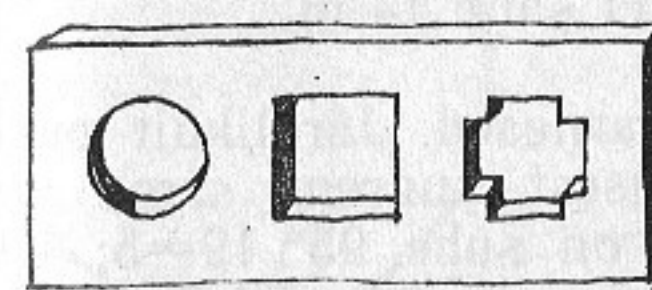
* Pythagorase teoreemi tundvad lugejad taipavad, et see kolmnurk on täisnurkne, sest $3^2 + 4^2 = 5^2$.



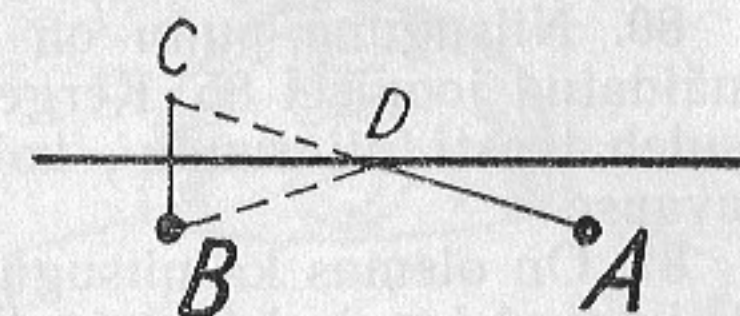
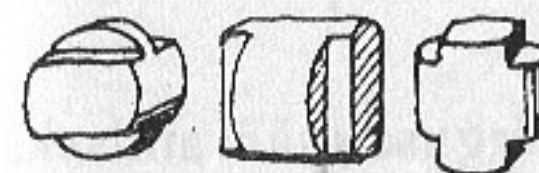
Joon. 82



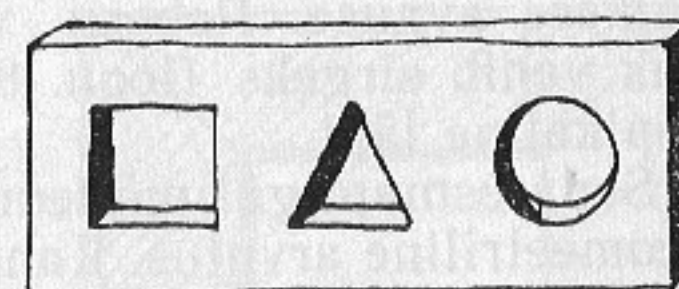
Joon. 84



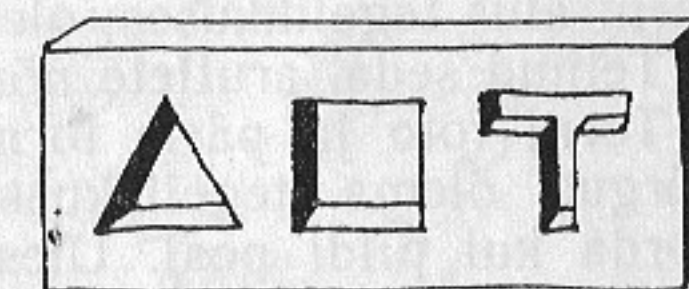
Joon. 86



Joon. 83



Joon. 85



Joon. 87



80. Niisugune punn on tõesti olemas. Tema kuju on näidatud joonisel 85. Kerge on veenduda, et selline punn suleb tõesti nii ruudu-, kolmnurga- kui ka ringikujulise avause.

81. On olemas ka niisugune punn aukude jaoks, mis on kujutatud joonisel 86: ringi-, ruudu- ja ristkülikukujuline.

82. Ka niisugune punn on olemas: võite seda näha kolmest küljest joonisel 87.

(Joonestajatel tuleb tihti lahendada ülalvaadeldutele sarnaseid ülesandeid, taastades projektsioonide järgi masinaosade kujusid.)

83. Veider küll, aga viiekopikaline mahub tõesti läbi nii väikese avause. Paberit venitatakse, nii et ümmargune auk venib sirgeks (joon. 88): sellest avausest läheb viiekopikaline läbi.

Seda esmapilgul mõtlemapanevat tulemust aitab mõista geomeetriline arvutus. Kahekopikalise diameeter on 18 mm, ning ümbermõõt, nagu näitab lihtne arvutus, võrdub (veidi üle) 56 mm. Sirgeks venitatud avaus on sellest poole lühem, järelikult 28 mm. Viiekopikalise läbimõõt on muuseas kõigest 25 mm, järelikult mahub ta läbi 28-mm avause, kui arvesse võtta isegi tema paksust ($1\frac{1}{2}$ mm).

84. Selleks et ülesvõtte järgi määrata torni kõrgust, tuleb kõigepealt võimalikult täpselt mõõta torni kujutise kõrgus ja läbimõõt fotol. Seejärel mõõdate, kui lai on torni alus tegelikkuses; oletame, et saite 14 m.

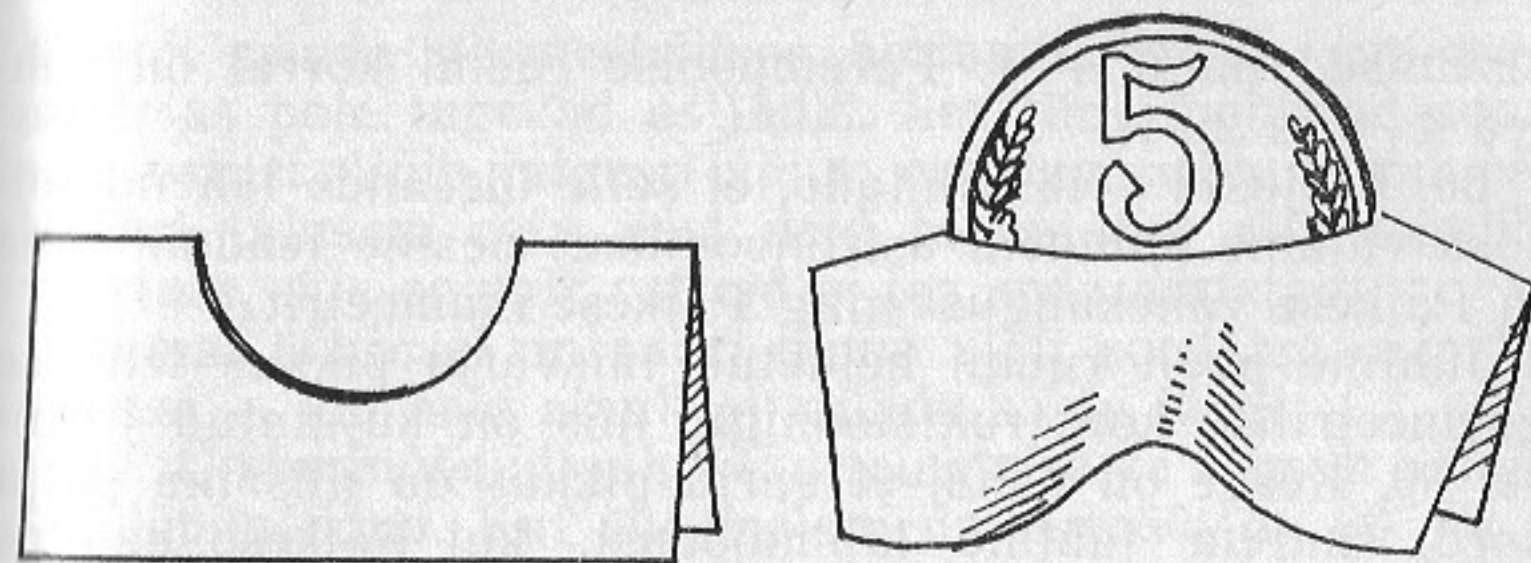
Teinud seda, arutlete nõnda.

Torni foto ja päris torn on sarnased. Järelikult peab kõrgus olema tegelikkuses laiuusest suurem sama arv korda kui pildi peal. Ülesvõttel on suhe $95:19=5$; siit järeldate, et ka päris torni kõrgus on alusest 5 korda suurem, seega $14 \times 5 = 70$ m.

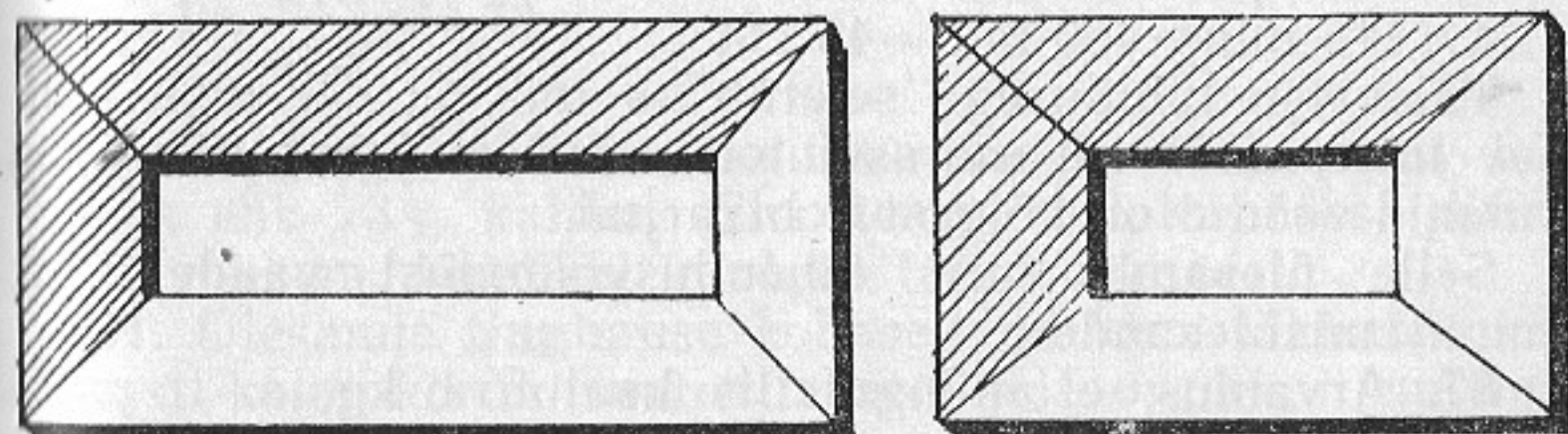
Niisiis on linnatorni kõrgus 70 m.

Tuleb lisada, et fotograafiliseks kõrguse määramiseks ei sobi mitte iga pilt, vaid ainult niisugune, millel torni proportsioonid pole moonutatud (nagu juhtub kogenematutel piltnikel).

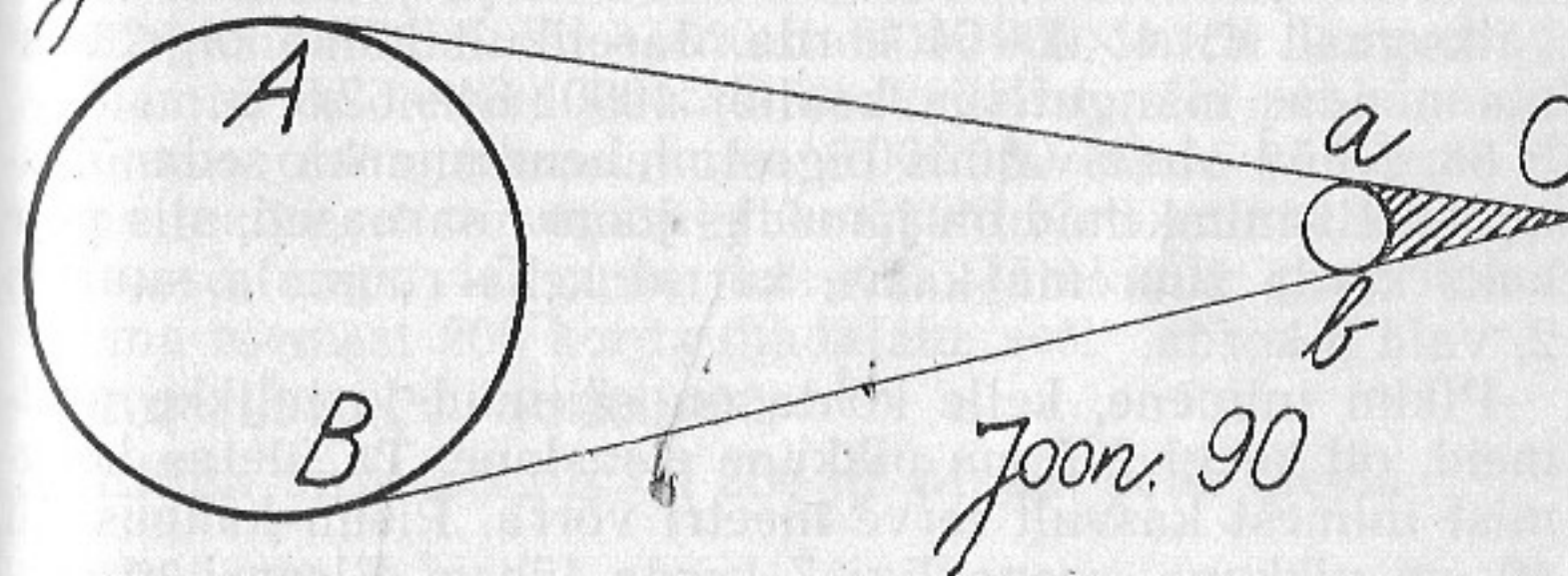
85. Tihti vastatakse mõlemale küsimusele jaatavalt. Tegelikult on sarnased ainult kolmnurgad; pildiraami sise- ja välisserva nelinurgad pole üldiselt sarnased. Kolmnurga sarnasuseks piisab nende nurkade võrdsusest, ja kuna sisemise kolmnurga küljed on välise kolmnurga külgedega paralleelsed, siis on need kujundid sarnased. Ent muude kujundite sarnasuseks nurkade võrdsusest (või



Joon. 88



Joon. 89



Joon. 90

mis seesama — külgede paralleelsusest) üksi ei piisa: tarvilik on ka külgede võrdelisus. Raami sise- ja välisserva korral kehtib see vaid siis, kui raam on ruudu- (või üldse rombi-)kujuline. Kõigil muudel juhtudel pole raami sise- ja välisnelinurga küljed võrdelised ning järelikult pole nad ka sarnased. Sarnasuse puudumine on eriti ilmikas piklike raamide korral (joon. 89). Vasakpoolse raami välisservad suhtuvad teineteisesse nagu 2:1 ja

sisemised nagu 4:1. Parempoolse raami korral on suhted 4:3 ja 2:1.

86. Paljusid võib üllatada, et selle ülesande lahendamiseks vajame andmeid astronoomiast: peame teadma Maa ja Päikese vahekaugust ning Päikese diameetrit.

Juhtme poolt ruumi heidetud täisvarju pikkus leitakse geomeetrilise konstruktsiooniga, mis on kujutatud joonisel 90. Kerge on näha, et varju pikkus on niisama palju kordi suurem juhtme läbimõõdust, kui Päikese kaugus Maast (150 000 000 km) on suurem Päikese diameetrist (1 400 000 km). Viimane suhe on ligikaudu 115. Järelikult on juhtme poolt ruumi heidetud täisvarju pikkus

$$4 \times 115 \text{ mm} = 460 \text{ mm} = 46 \text{ cm}.$$

Täisvarju lühidusega seletub ka tõik, et see pole nähtav maapinnal või majaseintel; viimasel juhul nähtavad tuhmid vöödid on kõigest poolvarjud.

Selle ülesande teist lahendusvõimalust vaadeldi 8. nuputamises ülesandes.

87. Arvamus, et mängutellis kaalub 1 kg, s. t. päris tellisest kõigest 4 korda vähem, on sügavalt ekslik. Väike tellis pole suurest mitte üksnes neli korda lühem, vaid ka madalam ja kitsam, mistõttu ta ruumala ja kaal tulevad väiksemad $4 \times 4 \times 4 = 64$ korda. Järelikult kõlab õige vastus nõnda: mängutellis kaalub $4000 : 64 = 62,5$ g.

88. Nüüd olete valmis õigesti lahendada ka seda ülesannet. Et inimkehad on jämedas joones sarnased, siis pole kaks korda suurema kasvu korral keha ruumala suurem 2, vaid 8 korda.

Pikim inimene, kelle kohta on säilinud kirjalikke andmeid, oli keegi 275 cm pikkune elsaslane. Ta ületas keskmist inimest kasvult terve meetri võrra. Pisim kääbus oli 40 cm pikkune, seega ligi 7 korda lühem Elsassi gigantist. Kui ühel kaalukausil seisnuks Elsassi gigant, pida- nuks teisel kääbuseid olema $7 \times 7 \times 7 = 343$.

89. Suure arbuusi maht ületab väiksema oma

$$1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} \times 1\frac{1}{4} = \frac{125}{64},$$

seega peaaegu kaks korda. Järelikult on tulusam osta suur arbuus: see on kõigest poolteist korda kallim, aga ainet on selles ligi kaks korda rohkem.

Mille pärast ikkagi ei küsi müüjad niisuguste arbuuside eest kaks, vaid kõigest poolteist korda rohkem? Seletus on

lihtsalt nende geomeetrilises harimatuses. Ja ega geomeetrias pole tugevad ostjadki, kes tihti loobuvad soodsast ostust. Võib julgesti väita, et suuri arbuuse on väikestest tulusam osta, sest neid hinnatakse alla tegeliku väärtuse, aga enamik ostjaid ei tea seda aimatagi.

Samal põhjusel on suuri mune alati soodsam osta kui väikesi — kui neid ainult ei müüda kaalu järgi.

90. Ümbermõõdud suhtuvad teineteisesse täpselt samuti kui läbimõõdud. Kui ühe meloni ümbermõõt on 60 cm ja teisel 50 cm, siis on nende diameetrite suhe $60:50 = \frac{6}{5}$ ning nende ruumalade suhe

$$\left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{216}{125} \approx 1,73.$$

Kaalu järgi müües oleks suur melon väiksemast 1,73 korda ehk 73% kallim. Ent tema eest küsitakse ainult 50% rohkem. Järelikult on teda tulusam osta.

91. Ülesande tingimuse kohaselt on kirsi läbimõõt kivi omast kolm korda suurem. Järelikult on kirsi ruumala kivi omast $3 \times 3 \times 3 = 27$ korda suurem. Kivi arvele langeb $\frac{1}{27}$ kirsi ruumalast, viljalihale ülejäänud $\frac{26}{27}$. Järelikult on kirsis viljaliha kivist mahuliselt 26 korda rohkem.

92. Kui mudel on esemest 8 000 000 korda kergem ja mõlemad on tehtud samast materjalist, siis peab mudeli ruumala olema eseme omast 8 000 000 korda väiksem. Me juba teame, et niisugusel juhul suhtuvad ruumalad teineteisesse nagu kõrguste kuubid. Järelikult peab mudel olema esemest 200 korda madalam, sest

$$200 \times 200 \times 200 = 8\,000\,000.$$

Eiffeli torni kõrgus on 300 m. Mudel peab olema

$$300 : 200 = 1\frac{1}{2} \text{ m}$$

kõrge.

Mudel tuleb peaaegu inimese pikkune.

93. Potid on teineteisega sarnased kehad. Kui suurem pott on 8 korda mahukam, siis peavad kõik tema joonmõõtmed olema kaks korda suuremad. Aga et ta on kaks korda kõrgem ja laiem, siis on tema pindala $2 \times 2 = 4$ korda suurem, sest sarnaste kehade pindalad suhtuvad nagu lineaarmõõtmete ruudud. Et potid on tehtud ühepaksusest plekist, siis sõltub nende kaal pindalast. Siit saame ka ülesande vastuse: suurem pott on väiksemast neli korda raskem.

94. Esimesel pilgul ei paista sellel ülesandel olevat matemaatikaga mingit pistmist, kuid ometigi lahendatakse seda põhimõtteliselt samasuguse geomeetrilise arutluse teel kui eelmistki.

Enne lahendama asumist vaatleme sarnast, kuid mõnevõrra lihtsamat ülesannet.

Kaks ühesugusest materjalist kannu (või samovari), suur ja väike, on täidetud keeva veega. Kumb jahtub kiiremini?

Asjad jahtuvad põhiliselt pinnalt. Järelikult jahtub kiiremini kann, millel iga ruumalaühiku kohta tuleb rohkem välispinda. Kui kann on teisest n korda kõrgem ja laiem, siis on tema pindala suurem n^2 ja ruumala n^3 korda; pindalaühiku kohta tuleb suurel kannul n korda rohkem ruumala. Järelikult jahtub väike kann kiiremini.

Seepärast peab ka laps, kes on täiskasvanuga ühesuguselt riietatud, tundma rohkem külma: keha igas kuupsentimeetris tekib mõlemal umbes ühepalju soojust, kuid jahtumispind tuleb lapsel iga kuupsentimeetri kohta suurem kui täiskasvanul.

Siia kuulub veel niisugune ülesanne:

Miks süttib pilbas kergemini kui halg, mille küljest ta on raiutud?

Et kuumutamine toimub läbi pinna ja levib kogu ruumalas, siis tuleb võrrelda pilpa pindala ja ruumala (näiteks ristlõiget) halu pindala ja ruumalaga (samuti ristlõikega). Sel teel leiame, milline pindala tuleb mõlemal juhul kuupsentimeetri puidu kohta. Kui halg on pilpast 10 korda paksem, on tema ruumala suurem 100 korda. Järelikult tuleb pilpal ruumalaühiku kohta 10 korda suurem välispindala, mistõttu ta süttibki halust kergemini, kui kasutada üht ja sama soojusallikat. (Puidu halva soojusjuhtivuse tõttu kehtivad mainitud suhted vaid ligikaudu, iseloomustades protsessi vaid üldiselt, mitte selle kvantitatiivset külge.)

Vihma ja lume geomeetria

95. Sademetemõõtja. Harjumuspäraselt peetakse Lenigradi väga vihmaseks linnaks, hoopis vihmasemaks kui Moskvat. Ent teadlased väidavad vastupidist: nad kinnitavad, et Moskvas langeb aastaga rohkem sademeid kui Leningradis. Kuidas nad seda teavad? Kas võib siis mõõta veehulka vihmavalingus?

Ülesanne näib küll raskevõitu, aga omavahel öeldes tulete sellega isegi toime. Te ei pea sugugi koguma kokku kogu veehulga, mis vihmapiilvest maha langeb. Piisab sellest, kui mõõdate, millise paksusega veekiht moodustuks sajuga maapinnal, kui vett ära ei voolaks või pinnasesse ei imbuks. Seda pole sugugi raske teha. Vihm langeb maapinnale kogu ulatuses ühtlaselt: ei juhtu ju, et ühte peenart kastab ta rohkem kui teist. Seepärast, mõõtnud vihmaga mingile väikesele pinnale langenud veekihi paksuse, teame, milline veekiht langes tervele sajualale.

Arvatavasti juba taipasite, kuidas mõõta vihmaga langenud veekihti. Tuleb hoolitseda selle eest, et vähemasti ühelt väikeselt pinnatükilt ei voolaks vett ära ega imbuks pinnasesse. Selleks pinnatükiks sobib iga lahtine anum, näiteks ämber, mille ristlõikepindala on nii ülal kui all ühesuurus.* Pärast vihma lõppu mõõtke ämbrisse kogunenud veekihi kõrgus ja te teate kõik, mida vajate arvutusteks.

Vaatleme lähemalt oma isetehtud sademetemõõtjat. Kuidas mõõta veetaseme kõrgust ämbris? Kas nõnda, et torgata vette püsti joonlaud? See on mugav ainult juhul, kui vett on palju. Ent kui kihi paksus ei ületa 2–3 cm või isegi millimeetrit, nagu tavaliselt ongi, pole niisuguse mõõtmise täpsus kuigi suur. Aga tähtis on iga millimeeter, isegi selle kümnendik osa. Mida teha?

* Anum tuleb asetada kõrgemale, et sinna ei ulatuks mahalangenud piiskade pritsmeid.

Kõige parem on kallata vesi kitsasse klaasnõusse. Sel juhul tuleb veesammas kõrge ning seda on hõlbus läbi klaasseina mõõta. Kitsas nõus ei mõõda me küll vihmaga langenud veekihi paksust, kuid tulemust saab lihtsasti teisendada. Olgu klaasmensuuri diameeter ämbri omast kümme korda väiksem. Siis on mensuuri põhjapindala $10 \times 10 = 100$ korda väiksem kui ämbri. Järelikult, kui ämbri oli veekihi paksus 2 mm, siis tuleb see mensuuris tervelt 200 mm, s. o. 20 cm kõrgune.

Klaasnõu ei tohi olla ämbriist palju kitsam, sest siis peab ta olema liig kõrge. Piisab täiesti, kui klaasanuma ja ämbri diameetrid erinevad 5 korda; siis erinevad nende põhjapindalad ja samuti veesammaste kõrgused 25 korda. Veekihi igale millimeetrile ämbri vastab 25 millimeetri kõrgune veesammas mensuuris. Seepärast oleks hea kleepida mensuuri välispinnale pabeririba, millele on iga 25 mm järel tõmmatud jaotised ning nummerdatud need 1, 2, 3 jne. Nõnda saate veekihi paksuse teada arvutusteta, heites vaid pilgu klaasnõule. Kui kitsa anuma läbi mõõt pole suurema omast väiksem mitte 5, vaid 4 korda, peate jaotise tõmbama iga 16 mm järele.

Kitsasse mõõdunõusse on väga ebamugav valada vett üle ämbri ääre. Kallamise hõlbustamiseks võib ämbri ülaossa puurida augu ning torgata sinna korgitükiga suletava klaastoru.

Nõndaks, nüüd olete veekihi paksuse mõõtmiseks igati varustatud. Muidugi ei saa ämbri ja isetehtud mõõtenõuga niisama korrektseid tulemusi kui ehtsa sademetemõõtja ja päris mensuuriga, mida kasutatakse meteoroloogijaamades. Ent teie lihtsad ja odavad katseriistad võimaldavad siiski teha hulga õpetlikke katseid.

Niisiis, asume asja juurde.

96. Kui palju sademeid? Olgu meil 40 m pikkune ja 24 m laiune juurviljaaed. Vihm lakkas ja te tahate teada, milline veekogus langes aeda. Kuidas seda leida?

Alustuseks tuleb mõistagi mõõta langenud veekihi paksus; seda teadmata pole mõeldav ükski arvutus. Näidaku isetehtud sademetemõõtja veekihi paksuseks 4 mm. Arvutame, mitu kuupsentimeetrit vett oleks igal ruutmeetril aiamaal, kui seda ei imbuks pinnasesse. Ühe ruutmeetri laius on 100 cm ja pikkus samuti 100 cm ning sellel seisab 4 mm ehk 0,4 cm paksune veekiht. Järelikult on veekihi ruumala $100 \times 100 \times 0,4 = 4000 \text{ cm}^3$.

Teatavasti kaalub 1 kuupsentimeeter vett 1 g. Järelikult langes vihmaga igale juurviljaaia ruutmeetritele 4000 g, s. o. 4 kg vett. Juurviljaaia pindala on $40 \times 24 = 960 \text{ m}^2$. See tähendab, et tervele aiale langes sademeid $4 \times 960 = 3840 \text{ kg}$ ehk peaaegu 4 t.

Näitlikkuse mõttes arvutage veel, mitu ämbrit vett tuleks aeda maha valada, et see saaks kastetud sama hulga veega. Harilikku ämbri mahub 12 kg vett. Järelikult langes vihmaga aeda $3840 : 12 = 320$ ämbrit vett.

Niisiis peate juurvilja kastmiseks tühjendama aeda üle 300 veeämbri, et asendada umbes veerand tundi väldanud vihmaga.

Milliste arvudega kirjeldatakse tugevat ja nõrka vihmasedu? Selleks peame määrama, mitu milliliitrit sademeid (veesamba kõrgus) langeb ühe minutiga. Kui igas minutis langeb keskmiselt 2 mm, on tegemist äärmiselt tugeva paduvihmaga. Sügisese seeneilmaga võib seevastu tibusada tunnis kõigest millimeeter või vähemgi.

Nagu näete, on sademetena langeva vee hulga mõõtmine pigem kerge kui raske ülesanne. Soovi korral võite leida koguni piiskade arvu vihmast. Tõepoolest, hariliku vihmaga kaaluvad piisad alati niipalju, et 1 grammi mahub neid 12. See tähendab, et aiamaal igale ruutmeetritele langes $4000 \times 12 = 48000$ vihmapiiska.

Samuti pole raske arvutada, mitu piiska langes tervele aiamaale. Kuid vihmapiiskade arvu leidmine võib üksnes rahuldada meie uudishimu, praktilist kasu sellest pole. Rääkisime sellest ainuüksi põhjusel, et näidata, milliseid esimesel pilgul uskumatuid asju saab oskuse korral leida.

97. Kui palju lund? Oleme õppinud leidma sadava vihmavee hulka. Ent kuidas mõõta rahega langevate sademete hulka? Täpselt samuti. Raheterad langevad sademetemõõtjasse ja sulavad veeks, mida te mõõdategi.

Teisiti mõõdetakse sademeid lume korral. Siis annaks sademetemõõtja väga petlikke tulemusi, sest osa lund tuiskab tuulega ämbriist välja. Ent lumekihi paksust võite puutlatiga mõõta ühegi sademetemõõtjaga otse õues, aiamaal või põllul. Saamaks teada, milline veekiht moodustub selle lume sulamisel, tuleb ämber täita lumega

² Vihm langeb piiskadena ka siis, kui meile näib, et sajab katkematute veejugadena.

sama paksult ja lasta sellel siis sulada. Nõnda leiategi, mitme millimeetri kõrgune veesammas tekib iga sentimeetri lumekihi sulamisel. Seda teades pole teil kuigi raske teisendada lumekihi paksust veekihi paksuseks.

Kui mõõdate kogu sooja aastaajal langeva vihmavee koguse ja lisate sellele veel juurde vee, mis langeb talvel lumena, siis saategi teada, kui palju sajab aastast teie kodukandis. Seda väga tähtsat arvu nimetatakse sademete hulgaks antud kohas (sademeteks nimetatakse üldiselt vett, mis langeb kas vihmana, rahena või lumena).

Nõukogude Liidu linnades langeb igal aastal sademeid keskmiselt järgmistes kogustes:

Leningrad	47 cm	Astrahan	14 cm
Vologda	45 „	Kutaissi	179 „
Arhangelsk	41 „	Bakuu	24 „
Moskva	55 „	Sverdlovsk	36 „
Kostroma	49 „	Tobolsk	43 „
Kaasan	44 „	Semipalatinsk	21 „
Kuibõšov	39 „	Alma-Ata	51 „
Orenburg	43 „	Taškent	31 „
Odessa	40 „	Jenisseisk	39 „
		Irkutsk	44 „

Loetletud kohtadest sajab kõige rohkem Kutaissis (179 cm) ja kõige vähem Astrahanis (14 cm), tervelt 13 korda vähem kui Kutaissis. Ent maakeral on kohti, kus sajab veelgi rohkem. Näiteks on Indias piirkond, mida vihmavesi lausa uputab: seal langeb aastast 1260 cm sademeid, s. o. 12 1/2 m! Kord sadas seal ühe ööpäevaga üle 100 cm. Ent Astrahanistki on kuivemaid kohti: Lõuna-Ameerikas, Tšiilis ei tule aastast sentimeetritki sademeid.

Piirkonnad, kus aastast langeb alla 25 cm sademeid, kannatavad liigkuivuse all. Põllundus pole siin kunstliku niisutamisetä mõeldav.

Kui te ei ela ühes linnadest, mis on loetletud tabelis, peate ise mõõtma oma kandis aastase sademete hulga. Mõõtes kannatlikult terve aasta, kui palju sajab iga vihma ja rahega ning milline veekogus sajab lumena, saate ettekujutuse, millisel kohal paikneb niiskuse poolest teie linn teiste Nõukogude Liidu linnade suhtes.

Pole raske taibata, et, mõõtnud, milline kogus vett langeb aastast maakera erinevates paikades, võib leida vee-

kihi paksuse, mis langeb aastast tervele Maale. Selgub, et maismaale (ookeani kohal niisuguseid mõõtmisi ei teostata) langeb aastast keskmiselt 78 cm sademeid. Arvatakse, et ka ookeanide kohal sajab umbes niisama palju. Hõlpsasti võime leida sellegi, milline veekogus langeb aastast sademetena tervele Maa pinnale. Selleks peame teadma Maa pindala. Kui teil pole seda kusagilt järele vaadata, võite selle leida ise järgmiselt.

Nagu teate, moodustab meeter enam-vähem täpselt ühe neljakümne miljondiku Maa ümbermõõdust. Teisisõnu, Maa ümbermõõt on 40 000 km. Iga ringi läbimõõt on umbes 3 1/7 korda väiksem selle ümbermõõdust. Seda teades leiame oma planeedi läbimõõdu:

$$40\,000 : 3\frac{1}{7} \approx 12\,700 \text{ km.}$$

Kera pindala leidmiseks tuleb läbimõõt korrutada läbi mõõduga ja saadud arv veel 3 1/7-ga:

$$12\,700 \times 12\,700 \times 3\frac{1}{7} \approx 509\,000\,000 \text{ km}^2.$$

(Neljandast numbrist alates kirjutame korrutises nullid seepärast, et usaldatavad on ainult kolm esimest numbrit.)

Niisiis on Maa pindala võrdne 509 miljoni ruutkilomeetriga.

Naaseme oma ülesande juurde. Leiame, kui palju vett langeb igale ruutkilomeetrile maapinnal. Ühele ruutmeetrile ehk 10 000 ruutsentimeetrile langeb

$$78 \times 10\,000 = 780\,000 \text{ cm}^2.$$

Ruutkilomeetris on $1000 \times 1000 = 1\,000\,000 \text{ m}^2$. Järelikult langeb talle vett

$$780\,000 \times 1\,000\,000 = 780\,000\,000\,000 \text{ m}^3.$$

Teisendamaks seda arvu kuupkilomeetriteks, jagame selle $1000 \times 1000 \times 1000$, s. t. miljardiga. Saame 780 000 km³.

Niisiis langeb igal aastal atmosfäärist meie planeedi pinnale umbes 400 000 km³ vett.

Sellega lõpetame oma vestluse jää ja lume geomeetria. Üksikasjalikumalt võib siin puudutatud küsimustest lugeda meteoroloogiaalasest kirjandusest.

Matemaatika ja legend veeuputusest

98. Legend veeuputusest. Piiblisse kogutud tähendamissõnade seas on pärimus paduvihmast, mis olevat kunagi uputanud ka kõige kõrgemad mäed. Piibli järgi «Jumal vaatas maad, ja näe, see oli raisku läinud, sest kõik liha maa peal oli oma eluviisidega raiskunud!»

Ja Jumal ütles Noale: «Ma olen otsustanud teha lõpu kõigele lihale, sest maa on täis nende vägivalda, ja see pärast, vaata, ma hävitan nad ühes maaga!»

Vaga mees Noa oligi ainus inimene, kes leidis armu Jumala silmis. Jumal hoiatas teda peatse hukatuse eest ja käskis ehitada suure laeva, mis oleks kolmsada küünart pikk, viiskümmend küünart lai ja kolmkümmend küünart kõrge. Laevas oli kolm korrust. Laevaga ei pidanud pääsema ainult Noa pere ja ta täiskasvanud poegade pered, vaid ka kõik maismaaloomade ja lindude liigid. Jumal käskis võtta Noal oma laeva ühe paari igast liigist ja toidumoonaks pikaks ajaks.

Kõige liha hävitamiseks valis Jumal paduvihma. Vesi pidi uputama kõik inimesed ja maismaaloomad. Pärast pidi Noast ja ellujäänud loomadest tekkima uus inimkond ja loomariik.

Piibel kirjutab: «Siis tuli nelikümmend päeva veeuputust maa peale... Vesi tõusis ja tõstis laeva, nõnda et see kerkis kõrgele maast... Ja vesi võttis maa peal üpris väga võimust ja kõik kõrged mäed taeva all kaeti. Vesi tõusis neist viisteistkümmend küünart kõrgemale, nõnda et mäed olid kaetud... Nõnda hävitati kõik olendid, kes maa peal olid; niihästi inimesed kui loomad ja roomajad ja linnud taeva all hävitati maa pealt, ja jäid järele ainult need, kes temaga kaasas olid.» Vesi võimutses Maa peal kokku sada viiskümmend ööpäeva, seejärel ta kadus

ning Noa pere koos kõigi pääsenud loomadega lahkus laevast, et asustada tühjaks jäänud maa.

Selle pärimuse kohta tekib kaks küsimust.

1. Kas saab olla paduvihma, mis kataks maakera kõige kõrgemad mäed?

2. Kas kõik loomaliigid võisid mahtuda Noa laeva?

99. Kas uputus oli võimalik? Lahendame nii selle kui ka teise küsimuse matemaatika abil.

Üleujutuseks vajaliku vee sai võtta ainult atmosfäärist. Ka pärast uputust sai vesi kaduda ainult atmosfääri, sest ta ei saanud pinnasesse imbuda või planeedilt lahkuda. Ta sai üksnes aurustuda: siirduda planeeti ümbritsevasse õhkkonda. Sel juhul võib tekkida uus uputus, kui see vesi sajab uuesti alla. Kontrollime, kas see on võimalik.

Vaatame meteoroloogiaalasest raamatust järele, kui palju niiskust on Maa atmosfääris. Ühe ruutmeetri maa-pinna kohal olevas õhusambas leidub keskmiselt 16 kg veeauru ning selle hulk ei tõuse mitte kunagi üle 25 kg. Leiame, kui paks veekiht moodustuks, kui see vesi sajab kõik korraga alla. Veekoguse 25 kg, s. o. 25 000 g ruumala on 25 000 cm³. Kui niisugune veekogus langeks ühele ruutmeetrile, s. o. 100 cm × 100 cm = 10 000 cm²-le, saame veekihi kõrguseks (jagades vee ruumala põhja pindalaga)

$$25\,000 : 10\,000 = 2,5 \text{ cm.}$$

Paduvihmaga ei saa langeda paksemat veekihti, sest rohkem pole atmosfääris vett.* Ka nii paks oleks veekiht ainult juhul, kui vett ei imbuks pinnasesse.

Tehtud arvutus näitab, et kui veeuputusetaoline loodusõnnetus oleks tõesti leidnud aset, poleks veekihi paksus ületanud 2,5 cm. Seda on sootuks vähem kui kõrgeima mäe Mount Everesti (Džomolungma) kõrgus, mis küünib ligemale 9 kilomeetrini. Uputuse kõrgus on piiblis üles puhutud ei rohkem ega vähem kui 360 000 korda. See pärast oluks niisugune ülemaailmne 40-päevane paduvihm haledam isegi sügisesest seenevihmast, sest ühe päevaga langenuks alla poole millimeetri sademeid. Isegi uduvihmaga tuleb 20 korda rohkem sademeid.

* Paljudes maakohtades langeb sademeid korraga üle 2,5 cm, kuid need ei lange alla sugugi ainult selle paiga kohalt, tuul toob neid ka mujalt juurde. Piiblis mainitud veeuputuse korral niisugust võimalust polnud, sest sadu hõivas korraga terve maakera.

100. Kas Noa laev oli võimalik? Vaatleme teist küsimust, kas Noa laev võis mahutada kõik maismaaloomade liigid.

Leiame laeva «elamispinna». Piibli järgi oli laevas kolm korrust, kõigil suurus 300·50 küünart. Muistsete Lähis-Ida rahvaste pikkusühik küünar on umbes 45 cm ehk 0,45 m. Järelikult oleksid laeva mõõtmed meil kasutatavates mõõtühikutes

$$\text{pikkus } 300 \times 0,45 = 135 \text{ m;}$$

$$\text{laius } 50 \times 0,45 = 22,5 \text{ m;}$$

$$\text{põrandapindala } 135 \times 22,5 \approx 3040 \text{ m}^2.$$

Kolme korruse kogupindala oleks

$$3040 \times 3 = 9120 \text{ m}^2.$$

Kas sellest piisab vähemasti kõigi imetajate liikide mahutamiseks? Imetajaid on umbes 3500 liiki. Ent Noa laeva pidi veel mahtuma neile söök 150 päevaks, nagu kestis veeuputus. Röövloom vajanuks peale loomade, kellest ta toitub, ka nende sööta. Laevas tulnuks imetajate paari kohta keskmiselt

$$9120 : 3500 = 2,6 \text{ m}^2,$$

millest ilmselt ei piisa, eriti kui arvestada, et ka Noa suur pere nõudis endale ruumi ja et loomapuuri vahel pidid mahtuma käigud. Pealegi pole imetajad ainsad loomad. Lisaks nendele pidi Noa laeva mahtuma paar

13 000 linnuliigist,

3500 roomajaliigist,

1 400 kahepaikseliigist,

16 000 ämblikulaadseliigist,

360 000 putukaliigist.

Kui imetajatel oleks olnud laevas lihtsalt kitsas, siis kõikidele nendele loomadele poleks ilmselt jätkunud kohta. Nende mahutamiseks pidanuks Noa laev olema hoopis suurem. Aga juba piiblis mainitud mõõtmetega laev on suur laev. Tema veeväljasurve on 20 000 t. On üsna uskumatu, et tol hallil ajal, kui tehnika oli alles lapsekingades, osati ehitada nii suurt laeva.

Ühesõnaga, piiblipärimus ülemaailmsest veeuputusest on vastuolus lihtsaima matemaatikaga. Ilmselt on legendile aluseks mingi kohalik üleujutus, ülejäänud pani juurde rikas idamaa fantaasia.

Kolmkümmend ülesannet

Loodan, et selle raamatu lugemine polnud päris tühi töö ning et meelelahutuse pakkumise kõrval see arendas lugeja tähelepanelikkust ja leidlikkust ning õpetas paremini kasutama teadmisi. Nüüd lugeja soovib arvatavasti panna oma oskusi proovile. Selleks ongi mõeldud need viimase peatüki kolmkümmend ülesannet.

101. Kett. Sepale toodi 5 ketijuppi, mis kõik koosnesid kolmest lülist, ja kästi teha nendest kett (joon. 91).

Enne tööle asumist jäi sepp mõttesse. Mitu lüli tuleb avada ja uuesti sulgeda? Ta leidis, et piisab neljast.

Kas ei saa piirduda vähemaga?

102. Ämblikud ja põrnikad. Poiss korjas karpi 8 putukat, ämblikku ja põrnikat, kellel on kokku 54 jalga.

Mitu ämblikku ja mitu põrnikat on karbis?

103. Vihmamantel, müts ja kalossid. Keegi ostis vihmamantli, mütsi ja kalossid, mis maksid kokku 20 rubla. Mantel maksab 9 rubla rohkem kui müts, müts ja mantel koos 16 rubla rohkem kui kalossid.

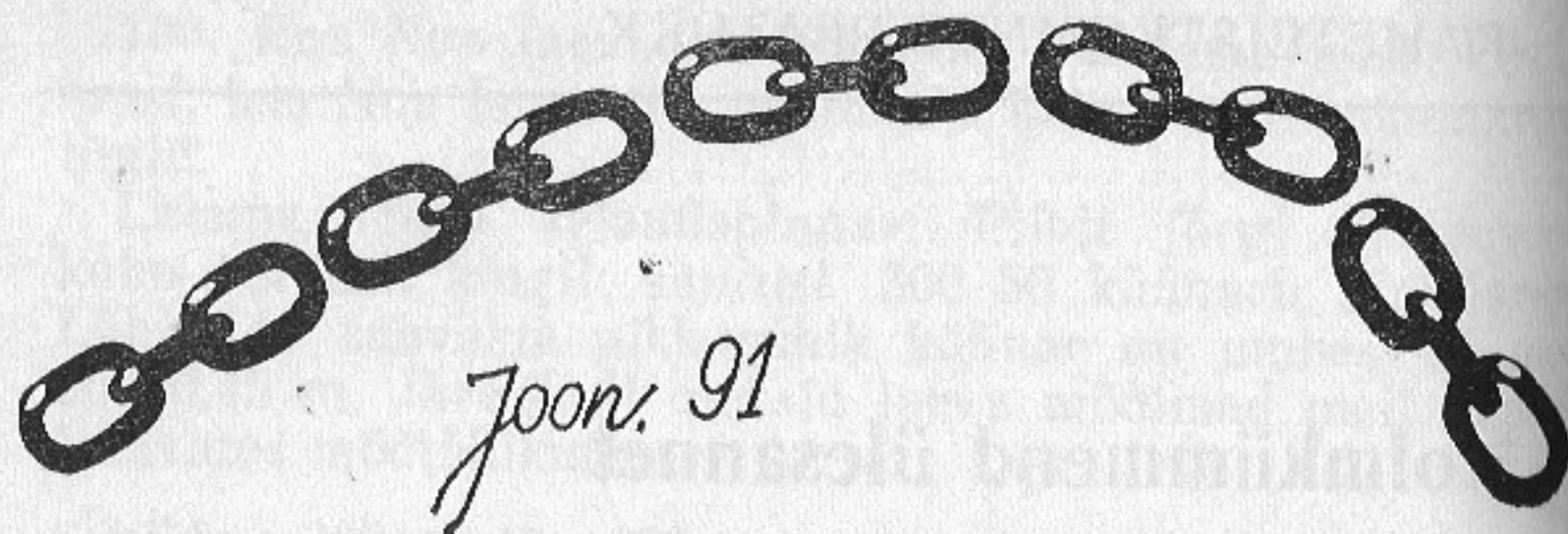
Kui palju maksab iga ese?

104. Kana- ja pardimunad. Osas korvides olid kana-, osas pardimunad. Mune oli neis 5, 6, 12, 14, 23 ja 29. «Kui müün selle korvi,» arutles müüja, «jääb mulle kanamune kaks korda rohkem kui pardimune.»

Millist korvi ta mõtles?

105. Lend. Lennuk katab vahemaa linnast A linna B 1 tunni 20 minutiga. Tagasitee võtab aega kõigest 80 minutit.

Kuidas asja seletada?



106. Kingitud raha. Uks isa kinkis oma pojale 150, teine 100 rubla. Selgus, et mõlemad pojad koos suurendasid oma kapitali ainult 150 rubla võrra.

Kuidas seda seletada?

107. Kaks kabenuppu. Tühjale kabelauale tuleb asetada kaks eri värvi nuppu.

Mitmel eri viisil saab seda teha?

108. Kahe numbriga. Missuguse vähima positiivse täisarvu võite kirja panna kahe numbriga?

109. Üks. Väljendage arv 1 kõigi 10 numbri abil.

110. Viie üheksaga. Väljendage 10 viie üheksaga vähemasti kahel eri viisil.

111. Kümne numbriga. Väljendage arv 100 kõigi kümne numbriga. Mitmel eri viisil oskate seda teha?

Võimalusi on vähemalt neli.

112. Neljal viisil. Väljendage arv 100 viie ühesuguse numbriga neljal eri viisil.

113. Nelja ühega. Leidke suurim arv, mida saab väljendada nelja ühega.

114. Mõistatuslik jagamine. Järgmises näites on tärnidega asendatud kõik numbrid peale nelja. Leidke puuduvad numbrid.

Ülesandel on mitu erinevat lahendit.

$$\begin{array}{r}
 \text{*****}4 \quad \text{***} \\
 \text{***} \quad \text{*4**} \\
 \hline
 \text{**4*} \\
 \text{****} \\
 \hline
 \text{****} \\
 \text{*4*} \\
 \hline
 \text{****} \\
 \text{****}
 \end{array}$$

115. Veel üks jagamine. Tehke sama järgmise jagamistehtega, kus on järele jäänud seitse seitset.

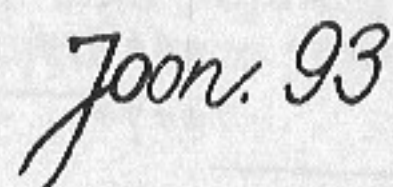
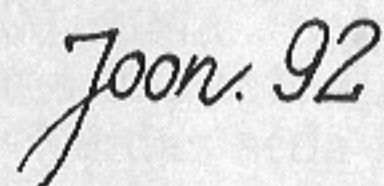
$$\begin{array}{r}
 \text{**7*****} \quad \text{****7*} \\
 \text{*****} \quad \text{**7**} \\
 \hline
 \text{*****7*} \\
 \text{*****} \\
 \hline
 \text{*7****} \\
 \text{*7****} \\
 \hline
 \text{*****} \\
 \text{****7**} \\
 \hline
 \text{*****} \\
 \text{*****}
 \end{array}$$

116. Mida saame? Arvutage peast, kui pika paela saame, asetades üksteise järel kõik ühte ruutmeetrisse mahtuvad ruutmillimeetri suurused ruudud?

117. Samas vaimus. Kui kõrge samba saame, kui asetame üksteise peale kõik ühes kuupmeetris olevad kuupmillimeetri suurused kuubid?

118. Lennuk. Lennukit tiibade siruulatusega 12 m fotografeeriti hetkel, kui ta lendas üle maas oleva kaamera. Aparaaadi sügavus on 12 cm ja kujutise läbimõõt 8 mm. Kui kõrgel lendas lennuk pildistamise hetkel?

119. Miljon toodet. Toote kaal on 89,4 g. Arvutage peast, kui palju kaalub miljon niisugust toodet.

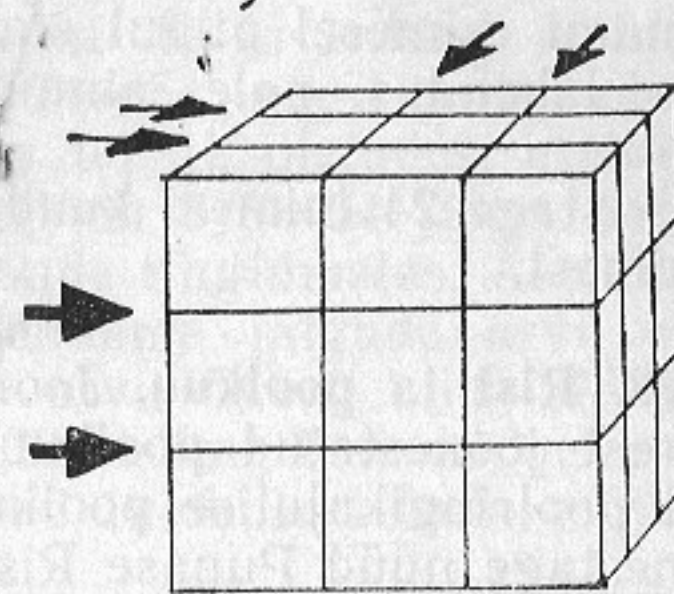
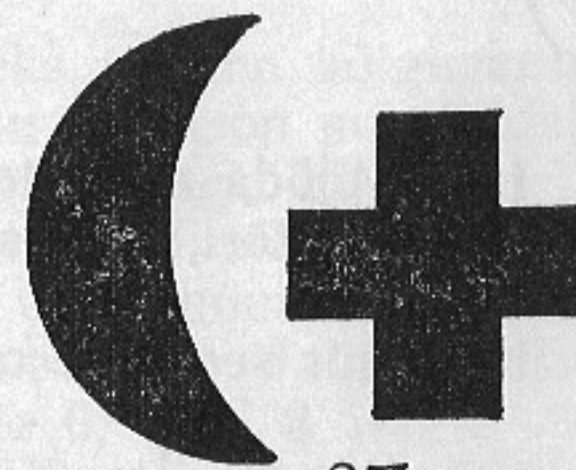
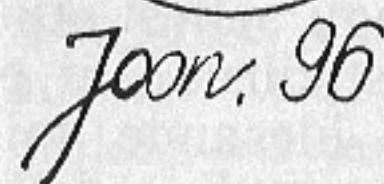
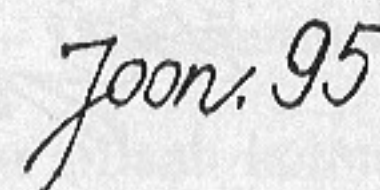
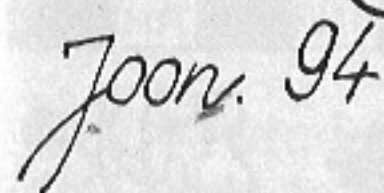


Kui palju sama pikkusega erinevaid teid võite leida?

Ülesande eesmärk pole mitte niivõrd proovile panna teie leidlikkust, kuivõrd arutluse kiirust.

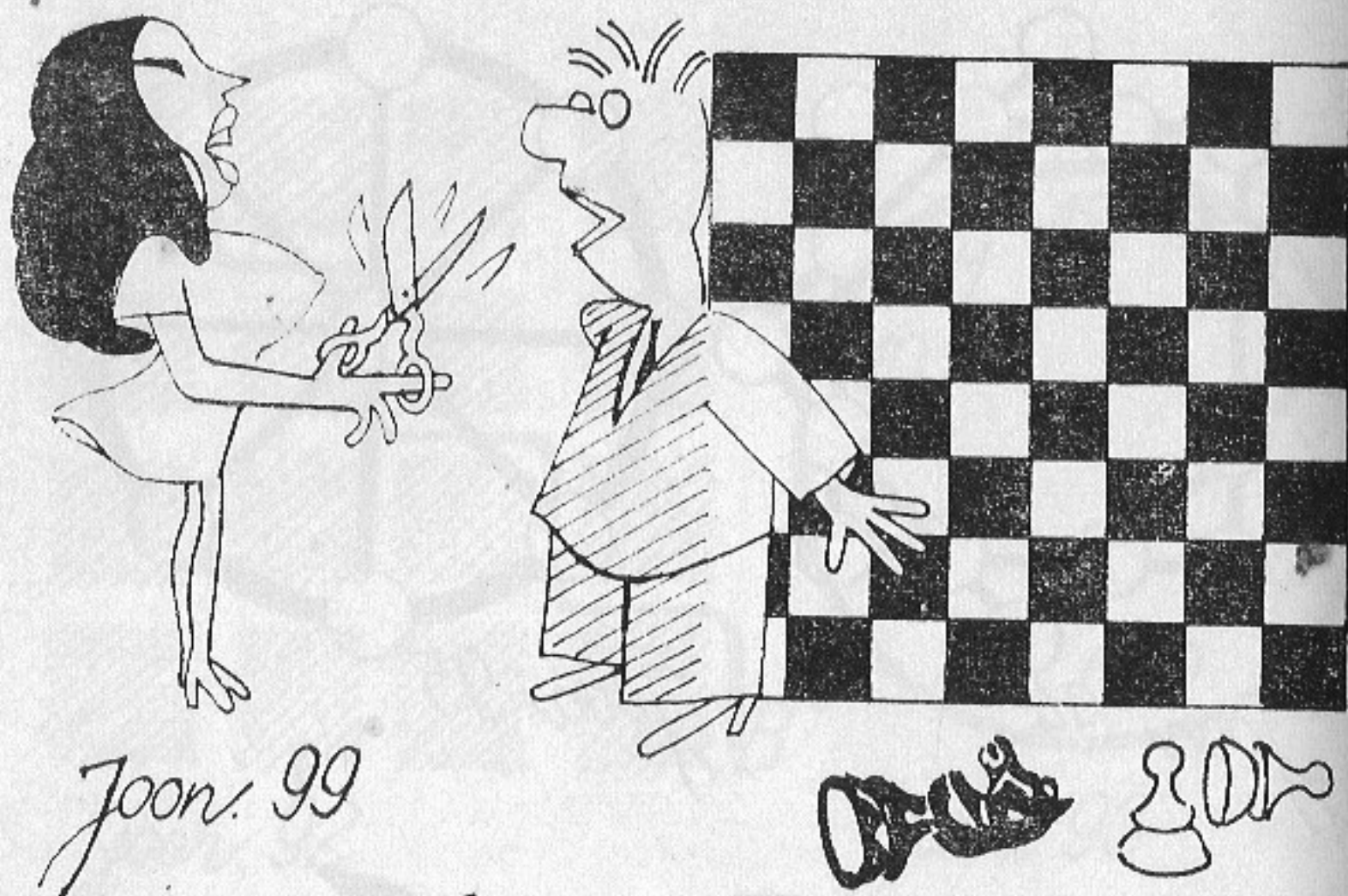
123. Arvratas. Paigutage numbrid 1—9 joonisel 95 olevasse kujundisse nõnda, et üks number oleks kujundi keskpunktis ja ülejäänud diameetrite otspunktides, kusjuures numbrite summa oleks igal sirgel 15.

132



Zoon. 98

133



126. Mööda ekvaatorit. Kui saaksime teha tiiru ümber Maa ekvaatori, läbiks meie pealagi pikema tee kui kannad.

Kui suur see vahe on?

127. Kuude ritta. Küllap olete kuulnud lugu sellest, kuidas pandi üheksa hobust seisma kümnes viirus, nii et igas viirus oli üks hobune. Nüüd anname ülesande, mis ei tundu esimesel pilgul sugugi vähem kummaline, kuid selle lahendus pole ainuüksi kujutletav, vaid täiesti reaalne.

Rivistage 24 inimest kuude ritta, nii et igas reas oleks 5 inimest.

128. Rist ja poolkuu. Joonisel 97 on kujutatud kahest kaarest joonestatud poolkuu. (Rangelt võttes pole tegemist poolringikujulise poolkuu, vaid kõigest kuusirbiga.) Joonestage nüüd Punase Risti sümbol, mille pindala võrdub poolkuu omaga.

129. Kuubi lõige. Teil on kuup servapikkusega 3 cm. Kuubi ruumala on 27 cm³. Teda saab lõigata kahekümne seitsmeks kuubiks servapikkusega 1 cm. Seda on lihtne teha, lõigates kuupi järgemööda 6 tasandiga, millest iga tahuga on paralleelsed kaks tasandit. Kujutlege nüüd, et

saate lahtilõigatud osi ruumis ringi asetada, nõnda et järgmine tasand lõikab kõiki osi. Kas see täiendav võimalus ei luba vähendada lõiketasandite arvu? (Joon. 98.)

130. Veel üks lõige. See ülesanne meenutab mõneti eelmist. Harilik 64-ruuduline malelaud tuleb lõigata eraldi ruutudeks. Lubatakse kasutada ainult sirgjoonelisi lõikeid, kuid pärast iga lõiget võib malelaua tükke tõsta ümber nõnda, et järgnev lõige läbib mitut lauatikki.

Mitu sirgjoonekujulist lõiget tuleb teha, et jaotada malelaud eraldi ruutudeks?

Nuputamisülesannete 101–130 lahendused

101. Nõutud töö tegemiseks piisab kolme lüli avamisest. Tuleb lahti teha kõik ühe ketijupi lülid ja ühendada nendega ülejäänud neli ketijuppi.

102. Selle ülesande lahendamiseks peame kõigepealt vaatama bioloogiaõpikust järele, mitu jalga on põrnikatel ja ämblikel: põrnikal on 6 ja ämblikul 8 jalga.

Nüüd oletame, et karbis on üksnes 8 põrnikat. Siis oleks neil $6 \cdot 8 = 48$ jalga — tervelt 6 võrra nõutust vähem. Asendame seepärast ühe põrnika ämblikuga. Jalgade arv suureneb 2 võrra, sest ämblikul pole 6, vaid 8 jalga.

On selge, et kolme niisuguse vahetusega suureneb jalgade arv 54-ni.

Niisiis oli karbis 5 põrnikat ja 3 ämblikku.

Kontrollime. Viiel põrnikal on 30 ja kolmel ämblikul 24 jalga, mis teeb kokku $30 + 24 = 54$, nagu pidigi olema.

Ülesande võib lahendada ka teisiti, oletades, et karbis on ainult 8 ämblikku. Siis neil on $8 \cdot 8 = 64$ jalga, tervelt 10 rohkem, kui on antud ülesande tingimustes. Asendades ühe ämbliku põrnikaga, vähendame jalgade arvu kahe võrra. Et vähendada jalgade arvu 54-ni, tuleb niisuguseid asendusi teha tervelt 5. Teisisõnu, 8 ämblikust saab alles jätta kõigest 3, ülejäänud tuleb asendada põrnikatega.

103. Kui vihmamantli, mütsi ja kalosside asemel oleks ostetud üksnes kaks paari kalosse, tulnuks 20 rubla asemel maksta niipalju vähem, kuipalju kalossid on odavamad mantlist ja mütsist koos, s. o. 16 rubla vähem. Järelikult maksab kaks paari kalosse $20 - 16 = 4$ rubla, millest ühe paari hind on 2 rubla.

Nüüd teame, et mantel ja müts maksavad kokku 18

rubla, kusjuures mantel on 9 rubla kallim. Arutleme nagu ennegi: ostame mantli ja mütsi asemel kaks mütsi, mille eest me ei maksa 18 rubla, vaid 9 rubla vähem. Niisiis maksavad kaks mütsi $18 - 9 = 9$ rubla; ühe mütsi hind on 4 rubla 50 kopikat.

Kalossid maksid 2 rubla, müts 4 rubla 50 kopikat ja mantel 13 rubla 50 kopikat.

104. Müüja mõtles 29 munaga korvi. Kanamunad olid 23, 12 ja 5 munaga korvis, pardimune oli 14 ja 6.

Kontrollime. Kanamune jäi järele

$$23 + 12 + 5 = 40$$

ja pardimune

$$14 + 6 = 20.$$

Kanamune on kaks korda rohkem kui pardimune, mis vastabki ülesande tingimustele.

105. Selles ülesandes pole midagi seletada: lennukil kulub mõlema otsa lendamiseks ühepalju aega, sest $80 \text{ min} = 1 \text{ h } 20 \text{ min}$.

Ülesanne on mõeldud tähelepanematute lugejate püüdmiseks, kelle meelest 1 h 20 min erineb 80 min-st. Veider küll, kuid sellesse püüdisse ei langegi nii vähe inimesi, nagu võiks arvata, ja rohkem just nende seast, kes palju arvutavad. Põhjus on selles, et nii rahasüsteem kui ka enamik mõõtühikuid baseeruvad kümnendsüsteemil. Nähes kirjutist «1 h 20 min» kõrval kirjutist «80 min», seostub see neil iseenesest niisuguste suurustega, nagu «1 rubla 20 kopikat» ja «80 kopikat». Ülesanne on mõeldudki selle psühholoogilise vea jaoks.

106. Segadust põhjustab see, et üks isa oli teisele pojaks. Tegemist polnud nelja, vaid kolme isikuga. Vana-isa andis pojale 150 rubla ning too oma pojale sellest rahast 100 rubla, nii et tema kapital suurenes kõigest 50 rubla võrra.

107. Esimese kabenupu võib asetada suvalisele 64 male-ruudust, s. t. 64 eri viisil. Pärast esimese nupu paigaldamist on teise paikapanekuks ülejäänud väljadele 63 võimalust. Järelikult võib esimese, suvalisele 64 ruudust paigaldatud kabenupu juurde lisada teise 63 eri viisil. Siit saamegi, et kokku on 2 kabenupu asetamiseks lauale

$$64 \times 63 = 4032$$

võimalust.

108. Paljude meelest on vähim kahest numbrist koos-

nev arv 10, kuid selleks on hoopis üks, mis on kirja pandud kujul

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{3}{3}, \frac{4}{4}, \dots, \frac{9}{9}.$$

Need, kes tunnevad algebrat, lisavad siia arvud

$$1^0, 2^0, 3^0, 4^0, \dots, 9^0,$$

sest iga arv nullindas astmes võrdub ühega.*

109. Arv üks tuleb esitada kahe murru summana:

$$\frac{148}{296} + \frac{35}{70} = 1.$$

Algebra tundjad võivad lisada veel:

$$123456789^0; 234567^0 - 8 - 1$$

jne., sest arv astmel null on üks.

110. Kaks võimalust on niisugused:

$$9 \frac{99}{99} = 10; 9 + 99^{9-9} = 10.$$

111. Neli lahendust on järgmised:

$$70 + 24 \frac{9}{18} + 5 \frac{3}{6} = 100;$$

$$80 \frac{27}{54} + 19 \frac{3}{6} = 100;$$

$$87 + 9 \frac{4}{5} + 3 \frac{12}{60} = 100;$$

$$50 \frac{1}{2} + 49 \frac{38}{76} = 100.$$

112. Arvu 100 võib kirjutada viie ühe, viie kolme ning kõige paremini siiski viie viiega:

$$111 - 11 = 100;$$

$$33 \times 3 + \frac{3}{3} = 100;$$

$$5 \times 5 \times 5 - 5 \times 5 = 100;$$

$$(5 + 5 + 5 + 5) \times 5 = 100.$$

113. Tihti antakse ülesandele vastuseks 1111, kuid võib pakkuda hoopis suurema arvu 11^{11} . Kui teil on kannatust seda välja arvutada (logaritmide kasutamine lihtsustab tunduvalt asja), siis veendute, et arv on suurem 280 miljardist. See arv on 250 miljonit korda suurem kui 1111.

* Vastused $0/0$ ja 0^0 pole õiged, neil puudub mõte.

114. Vaadeldavaid jagamistehteid võib olla neli:

$$1\ 337\ 174 : 943 = 1418;$$

$$1\ 343\ 784 : 949 = 1416;$$

$$1\ 200\ 474 : 846 = 1419;$$

$$1\ 200\ 464 : 848 = 1418.$$

115. See jagatis saab olla ainult

$$7\ 375\ 428\ 413 : 125\ 473 = 58\ 781.$$

Need kaugeltki mitte kerged ülesanded avaldati esimest korda ameerika väljaannetes *Mathematical Newspaper* 1920. a. ja *School World* 1906 a.

116. Ruutmeetris on tuhat korda tuhat ruutmillimeetrit. Tuhat külgnevat millimeetrise küljepikkusega ruutu moodustavad meetripikkuse paela, tuhat korda tuhat ruutu moodustavad tuhande meetri, s. o. kilomeetripikkuse paela.

117. Vastus on üllatav: samba kõrgus küüniks... 1000 km-ni. Arvutame peast. Kuupmeetris on $1000 \times 1000 \times 1000$ kuupmillimeetrit. Tuhat korda tuhat kuupmillimeetrist kuupi moodustavad üksteisele asetatuna $1000\text{ m} = 1\text{ km}$ kõrguse samba (nagu selgus eelmises ülesandes). Aga et kuupe on tuhat korda rohkem, siis saamegi 1000 km.

118. Jooniselt 100 on näha, et (nurkade 1 ja 2 võrdsuse tõttu) eseme ja selle kujutise joonmõõtmed suhtuvad teineteisesse samuti, kui eseme kaugus objektiivist suhtub kujutise kaugusesse objektiivist. Kui lennuki kõrgus maapinnast on x meetrit, saame:

$$12\ 000 : 8 = x : 0,12,$$

kust $x = 180\text{ m}$.

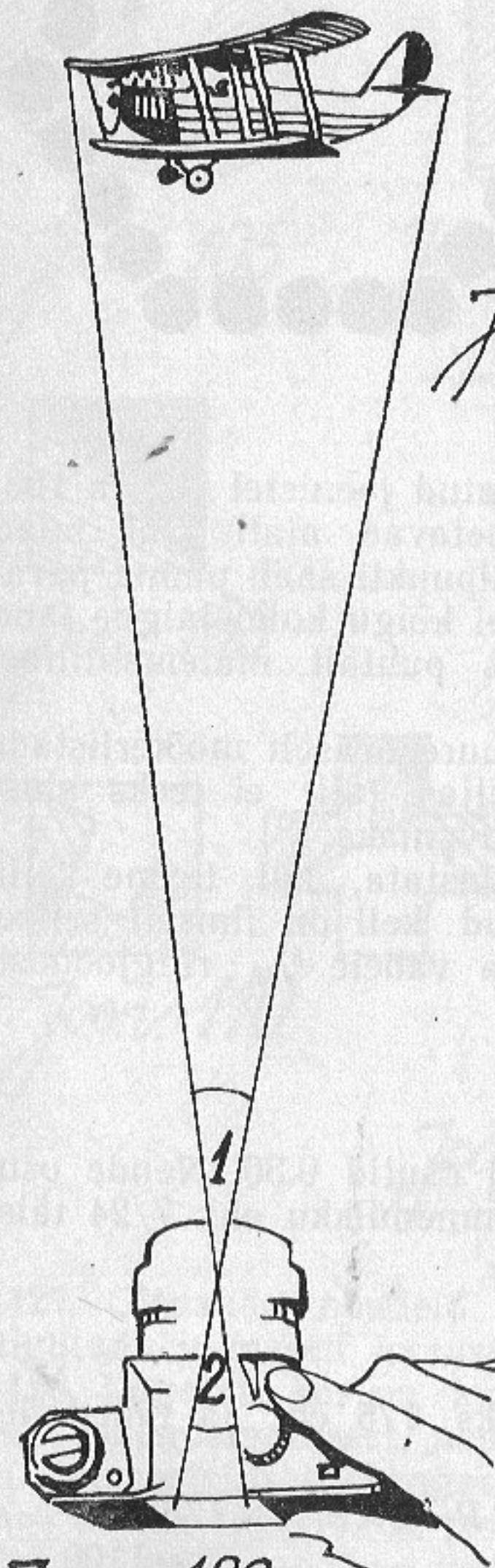
119. 89,4 g tuleb korrutada miljoni, s. t. tuhat korda tuhandega.

Korrutame kahes jaos: $89,4\text{ g} \times 1000 = 89,4\text{ kg}$, sest kilogramm on tuhat grammi; $89,4\text{ kg} \times 1000 = 89,4\text{ tonni}$, sest tonn on tuhat kilogrammi.

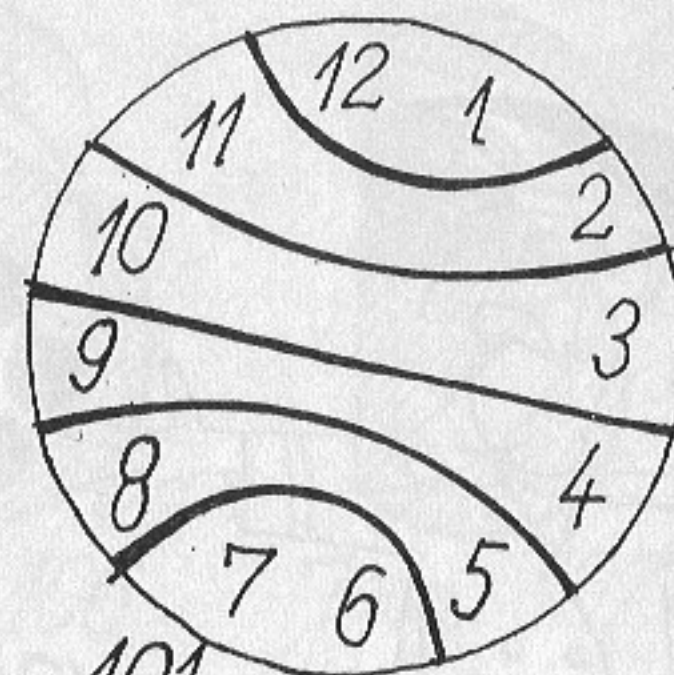
Otsitav kaal on seega 89,4 tonni.

120. Punkte A ja B ühendab 70 teed. (Ülesande süstemaatiline lahendus on võimalik kombinatoorikas õpitava Pascali kolmnurga abil.)

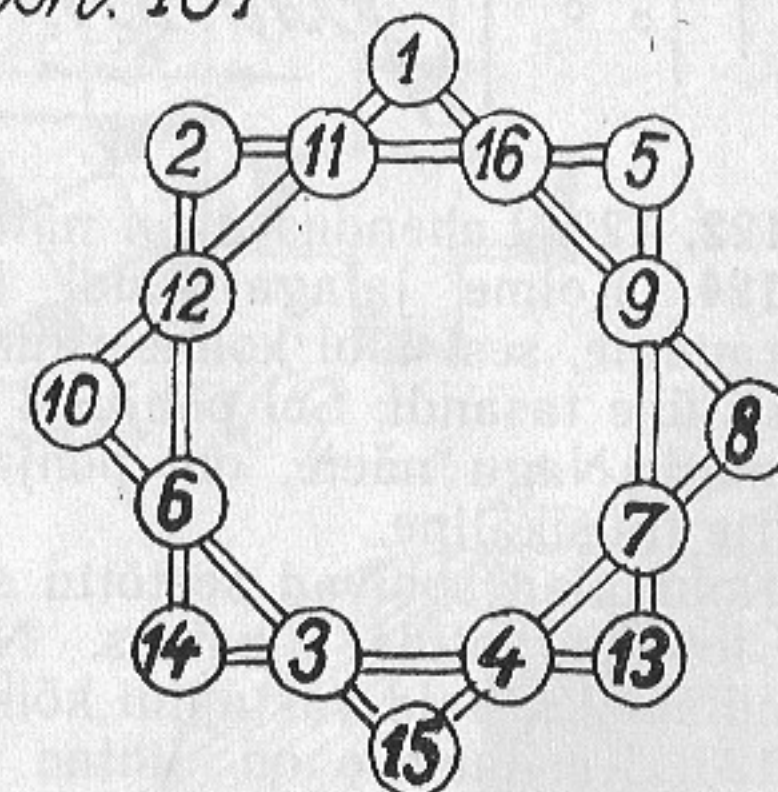
121. Et kõigi numbrilaua olevate arvude summa on 78, siis peab kõigis kuues osas arvude summa olema $78 : 6 = 13$. Nüüd leiame hõlpsasti lahenduse, mis on kujutatud joonisel 101.



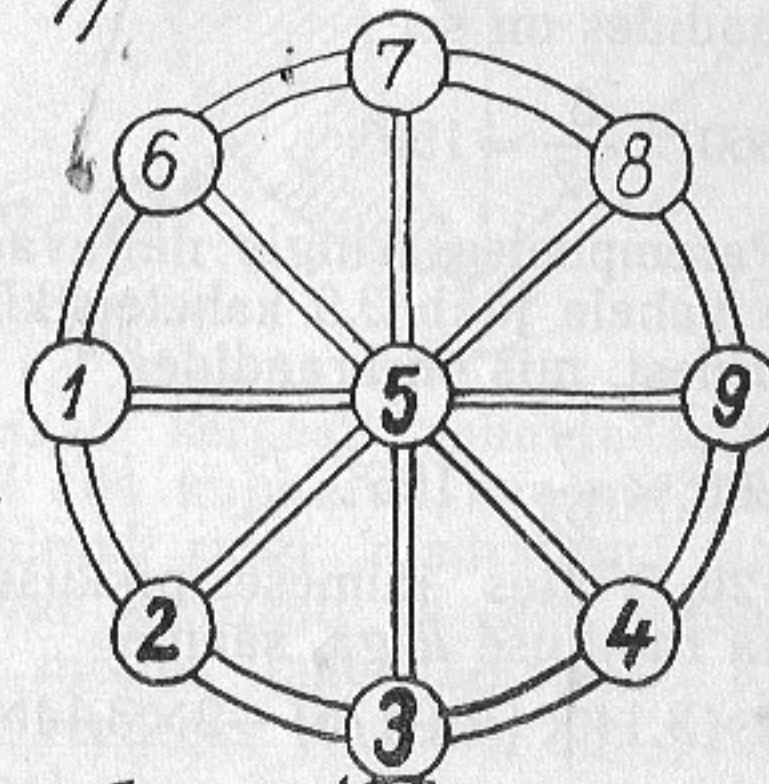
Joon. 100



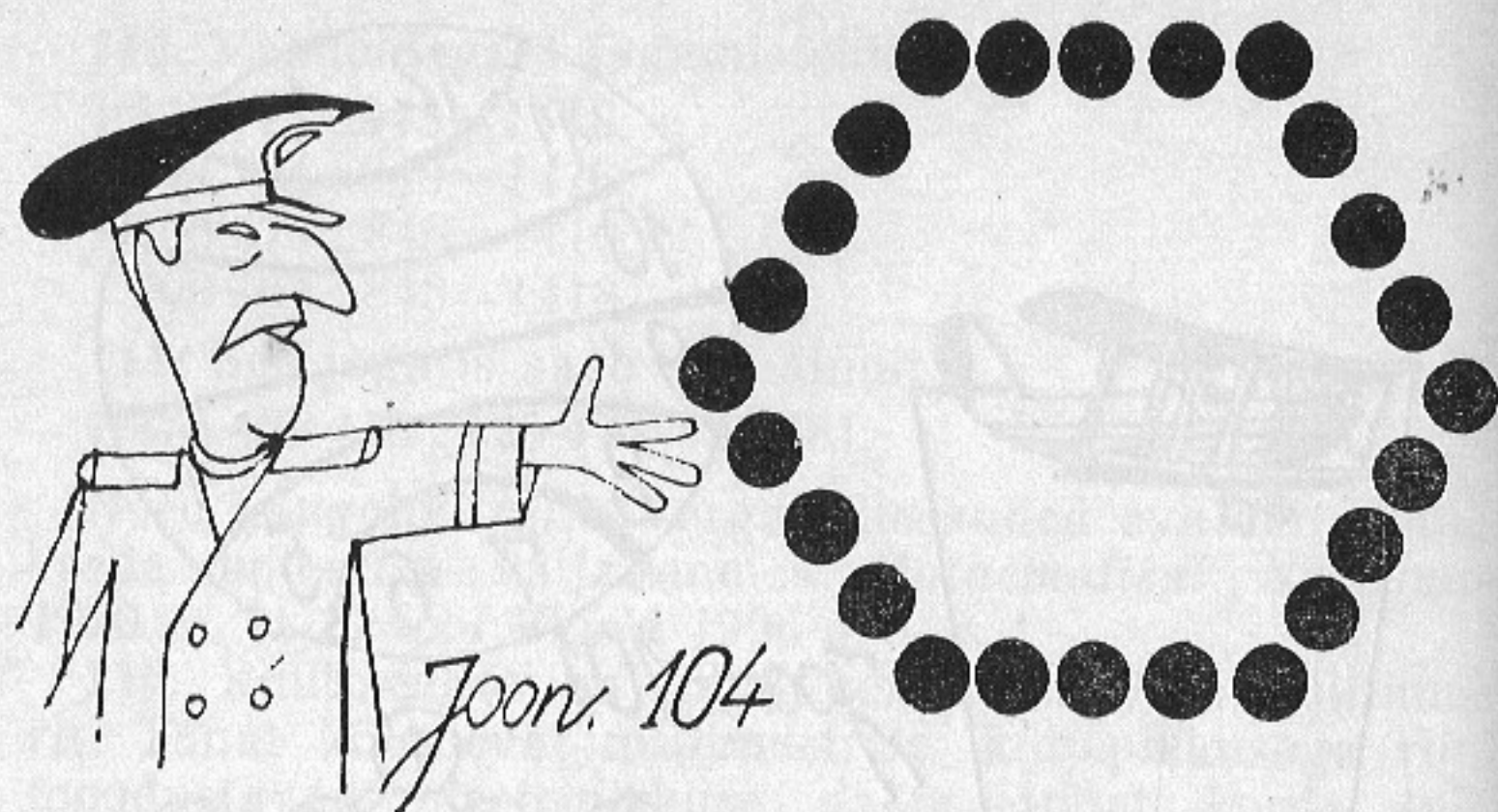
Joon. 101



Joon. 102



Joon. 103



122, 123. Lahendused on näidatud joonistel 102 ja 103.
 124. Kolme jalaga laual toetavad alati kõik jalad põrandale, sest läbi kolme ruumipunkti saab panna parajasti ühe tasandi. Sel põhjusel ei kõigu kolmejalgne laud kunagi. Nagu näete, on põhjus puhtalt matemaatiline, mitte füüsikaline.

Kolmjalad sobivad seetõttu suurepäraselt mõõteriistade ja fotoaparaatide alusteks. Neljas jalg ei teeks alust kindlaks, vaid vastupidi kõikuvamaks.

125. Küsimusele on lihtne vastata, kui teame kella näitu. Vasakus ringis kujutatud kell on ilmselt seitse. Järelikult haaravad osutid enda vahele $\frac{5}{12}$ ringjoonest. Kraadides on see

$$360^\circ \times \frac{5}{12} = 150^\circ.$$

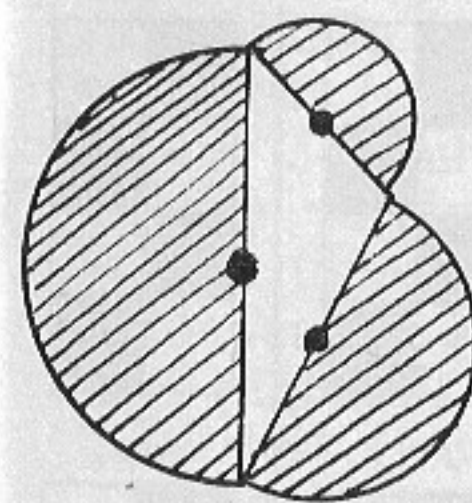
Parempoolses ringis näitavad osutid 9.30. Nende osutite vahele jääb 3,5 kaheteistkümnendikku ehk $\frac{7}{24}$ täispöördest, mis on kraadides

$$360^\circ \times \frac{7}{24} = 105^\circ.$$

126. Võttes inimese pikkuseks 175 cm ja tähistades Maa raadiuse R -ga, saame:

$$2 \times 3,14 \times (R + 175) - 2 \times 3,14 \times R = 2 \times 3,14 \times 175 \approx 1100 \text{ cm,}$$

s. o. umbes 11 m. Hämmastaval kombel ei sõltu tulemus üldse kera raadiusest ja on järelikult ühesuurune nii tohutu Päikese kui ka tillukese kera korral.



Joon. 105.



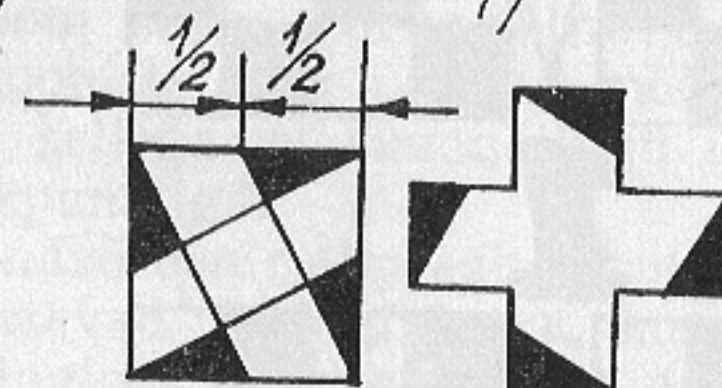
Joon. 106



Joon. 107



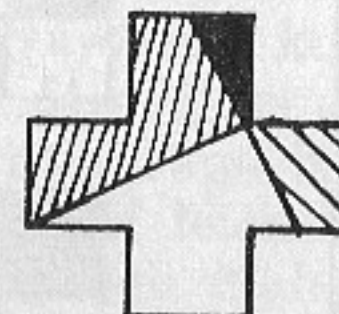
Joon. 108



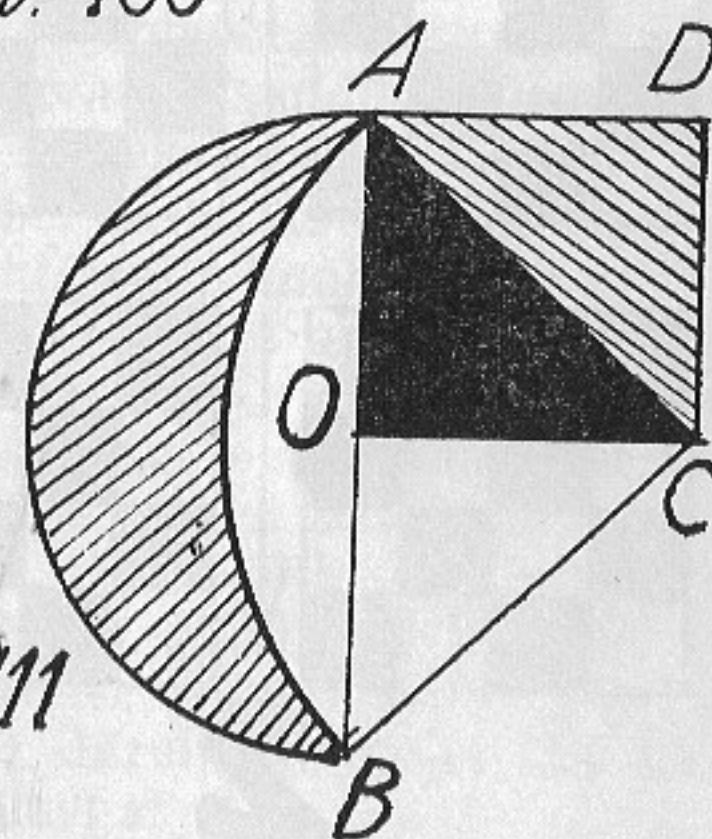
Joon. 109



Joon. 110



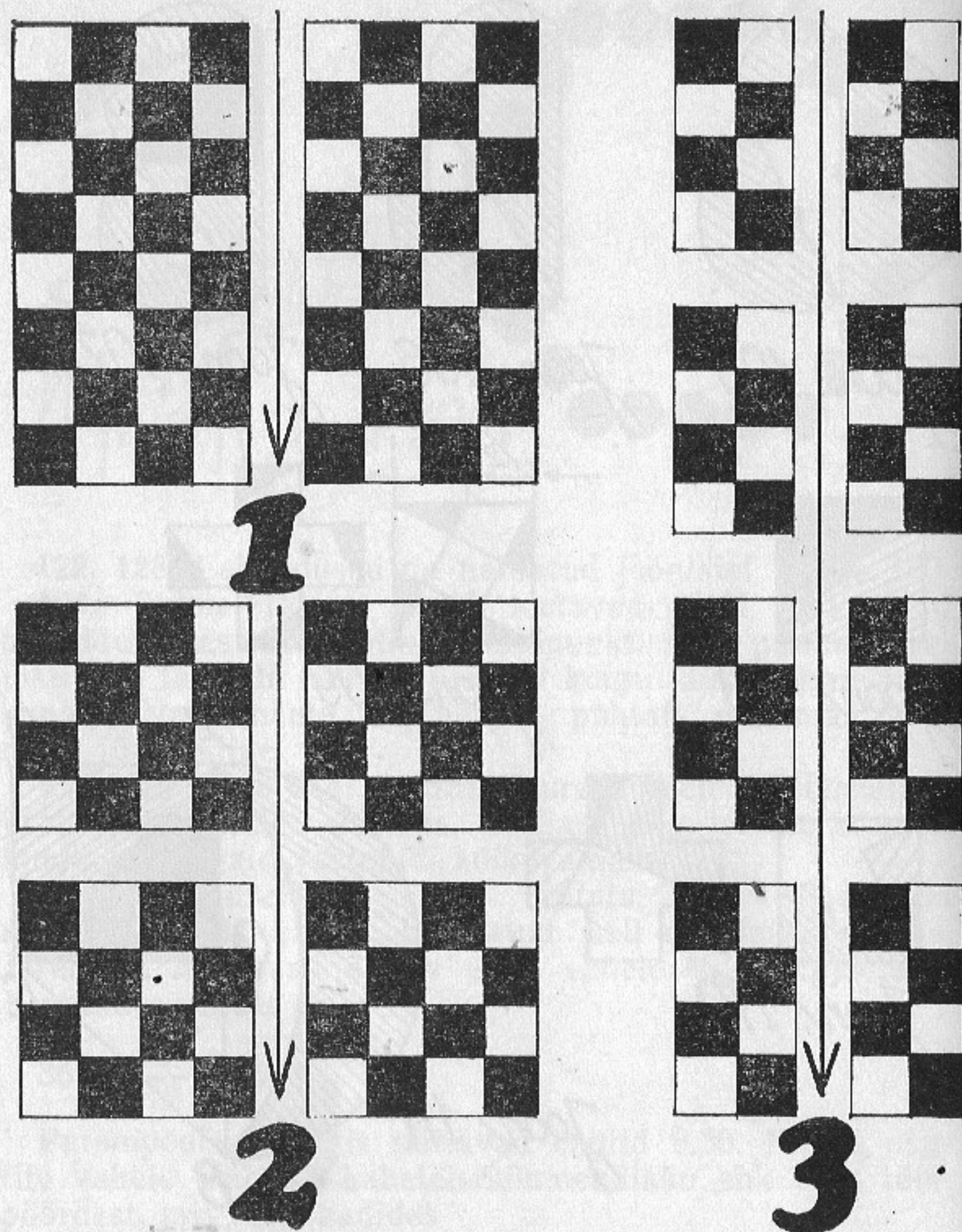
Joon. 111



127. Ülesande nõudeid saab kergesti rahuldada, kui paigutada inimesed joonisel 104 kujutatud kuusnurgana.

128. Lugejad, kes on kuulnud ringi kvadratuuri ülesande lahendamisest, peavad kindlasti ka seda ülesannet geomeetriliselt ranges mõttes lahendamatuks. Kui ringi ei saa teisendada pindvõrdseks ruuduks, siis peaks see kehtima ka poolkuu korral.

Ülesanne on siiski lahendatav geomeetrilise konstruktsiooniga. Tuleb kasutada Pythagorase teoreemi üht huvitavat järeldust. Pean silmas järeldust, mille kohaselt



Joon. 112

kaatetitele ehitatud poolringide pindala võrdub hüpotenuusile ehitatud poolringi pindalaga (joon. 105). Kandnud suure poolringi üle teisele poole hüpotenuusi, saame viirutatud kuusirbid, mis kokku on pindvõrdsed kolmnurgaga (joon. 106).^{*} Võrdhaarse täisnurkse kolmnurga kor-

^{*} Seda väidet tuntakse geomeetrias teoreemina Hippokratese kuudest.

ral võrduks kummagi kuu pindala poolega kolmnurga pindalast (joon. 107).

Siit järeldub, et geomeetrilise konstruktsiooniga saab ehitada võrdhaarse täisnurkse kolmnurga, mille pindala võrdub täpselt antud kuusirbi pindalaga. Et täisnurksest võrdhaarsest kolmnurgast saab kergesti moodustada sellega pindalalt võrdset ruutu, siis saab seda teha ka meie kuusirbist (joon. 108).

Nüüd jääb üle üksnes ehitada selle ruuduga pindalalt võrdne Punase Risti embleem, mis koosneb viiest ühesuuruselt külgepidi ühendatud ruudust.

Seda konstruktsiooni saab sooritada mitut viisi, kaks neist on näidatud joonistel 109 ja 110; mõlemad konstruktsioonid algavad sellega, et ruudu tipud ühendatakse ühe vastaskülje keskpunktiga.

Tähtis märkus: pindvõrdse risti saab ainult siis moodustada kuus, mille moodustavad 2 ringi kaart, kusjuures välimine neist on poolringjoon ja sisemine on neljandik suurema raadiusega ringjoonest (joon. 111).^{**}

129. Näidatud lisavõimalus ei lihtsusta ülesannet, sest niikuinii tuleb leida kuus lõikavat tasandit. Tõepoolest, sisemine 27 väikesest kuubist, milleks lõigatakse suur, on kuue tahuga. Me võime osi ümber tõsta, kuid ükski tasand ei saa lõigata korraka lahti kahte selle kuubi tahku.

130. Kõigepealt leiame vähima lõigete arvu. Kui teeme ühe lõike, jaguneb malelaud kaheks. Kui järgmine lõige läbib mõlemat osa, saame 4 osa. Kui paigutame nad nii, et ka kolmas lõige läbib kõiki, tuleb osi 8. Järgmise lõikega saame 16 osa (kui lõige läbib kõiki saadud osi), viiendaga 32. Järelikult ei saa me 5 lõikega kuidagi 64 ruutu, see arv täitub alles järgmise, kuuenda lõikega, kui ruutude arv jälle kahekordistub. Järelikult me ei tule kuidagi toime vähema kui kuue lõikega.

Nüüd tuleb näidata, et kuus lõiget saab ka tegelikult sooritada nõnda, et lahtilõigatud osade arv kahekordistub iga lõikega ja tulemusena saame $2^6=64$ eraldi ruutu. Seda pole enam raske teha, tuleb ainult jälgida, et iga lõikega saadud osad oleksid ühesuurused ja tükid lõigatakse jälle pooleks. Joonisel 112 on kujutatud kolm esimest lõiget.

^{**} Kuusirp, mida näeme taevas, on veidi teistsugune. Tema välimine joon on ringjoone kaar ja sisemine joon ellipsi kaar. Kunstnikud kujutavad kuud tihti valesti, moodustades ta kahe ringi kaardest.

Sisukord

Esimene peatükk	3
Hommikueine nuputamisesannetega	3
1. Orav lagendikul 3. 2. Uhisköögis 5. 3. Opilasringide töö 6. 4. Kumb saab rohem? 6. 5. Vanaisa ja lapselaps 6. 6. Raudtee-piletid 6. 7. Helikopteri lend 7. 8. Vari 8. 9. Tikuülesanne 8. 10. Salakaval känd 9. 11. Ülesanne detsembrikuu kohta 10. 12. Arvutrik 10.	
Nuputamisesannete 1—12 vastused	
13. Mahatõmmatud number 18. 14. Arvu mõistatamine midagi küsimata 19. 15. Kes võttis mida? 20	
Teine peatükk	22
Matemaatika mängudes	22
Doomino	22
16. Ahel 28 kivist 22. 17. Ahela algus ja lõpp 22. 18. Doomino-trikk 22. 19. Raam 22. 20. Seitse ruutu 22. 21. Maagilised ruudud doominokividest 24. 22. Aritmeetiline jada doominokividest 24.	
Viieteistkümne mäng	25
23. Lloyd'i esimene ülesanne 30. 24. Lloyd'i teine ülesanne 30. 25. Lloyd'i kolmas ülesanne 31.	
Kroket	31
26. Kas läbida väravat või krokeerida? 31. 27. Pall ja vai 31. 28. Kas läbida värav või tabada vaia? 31. 29. Läbida «hiirelõks» või krokeerida? 31. 30. Läbipääsmatu «hiirelõks» 31.	
Nuputamisesannete 16—30 vastused	31
Kolmas peatükk	39
Veel tosin peamurdmisesannet	39
31. Nöör 39. 32. Sokid ja kindad 39. 33. Juuksekarva iga 39. 34. Töötasu 40. 35. Suusasõit 40. 36. Kaks töolist 40. 37. Ettekande ümberkirjutus 40. 38. Kaks hammasratast 40. 39. Kui vana? 41. 40. Ivanovide perekond 41. 41. Lahuste valmistamine 41. 42. Ostud 42.	
Ülesannete 31—42 lahendused	42
Neljas peatükk	47
Kas oskate loendada?	47
43. Kas oskate loendada? 47. 44. Milleks loendada puid metsas? 50.	
Viies peatükk	51
Arvumõistatused	51
45. Viie rubla eest sada 51. 46. Tuhad 51. 47. Kaksikümne neli 51. 48. Kolmkümmend 52. 49. Puuduvad numbrid 52. 50. Missugused arvud? 52. 51. Mida jagati? 52. 52. Jagamine ühe-teistkümne 52. 53. Kummalsed korutised 53. 54. Arvukolmnurk 53. 55. Veel üks arvukolmnurk 53. 56. Maagiline täht 53.	
Nuputamisesannete 45—56 lahendused	54
Kuues peatükk	59
Sifreeritud kirjad	59
57. Võre 59. 58. Kuidas võret meelde jätta? 63.	

Seitsmes peatükk	60
Jutustusi arvuhiiglastest	60
59. Kasulik tehing 66. 60. Linnakumu 70. 61. Odavate jalgrataste laviin 73. 62. Autasu 75. 63. Legend malelauast 80. 64. Kiire paljunemine 83. 65. Tasuta lõunasöök 87. 66. Müntide ümber-tõstmine 92. 67. Kihlvedu 95. 68. Arvuhiiglastest meie ümber ja meis endis 99.	
Kaheksas peatükk	102
Möödulindita	102
69. Teepikkuse mõõtmine sammudega 102. 70. «Elav etalon» 104. 71. Müntidega mõõtmine 105.	
Üheksas peatükk	108
Geomeetrilised nuputamisesanded	108
72. Vanker 106. 73. Luubis 106. 74. Vesilood 106. 75. Tahkude arv 107. 76. Kuusirp 107. 77. Kaksteist tikku 107. 78. Kaheksa tikku 108. 79. Kärbe teekond 109. 80. Leida punn 109. 81. Teine punn 109. 82. Kolmas punn 109. 83. Viiekopikaline 109. 84. Torni kõrgus 110. 85. Sarnased kujundid 110. 86. Juhtme vari 110. 87. Mängutellis 111. 88. Gigant ja liliput 111. 89. Kaks arbuusi 111. 90. Kaks meloni 111. 91. Kirss 111. 92. Eiffeli torni mudel 111. 93. Kaks potti 111. 94. Pakase käes 111.	
Nuputamisesannete 72—94 vastused	111
Kümnes peatükk	121
Vihma ja lume geomeetria	121
95. Sademetemõõtja 121. 96. Kui palju sademeid? 122. 97. Kui palju lund? 123.	
Üheteistkümnes peatükk	128
Matemaatika ja legend veeuputusest	128
98. Legend veeuputusest 126. 99. Kas uputus oli võimalik? 127. 100. Kas Noa laev oli võimalik? 128.	
Kaheteistkümnes peatükk	128
Kolmkümmend ülesannet	128
101. Kett 129. 102. Ämblikud ja põrnikad 129. 103. Vahumägi tel, müts ja kalossid 129. 104. Kana- ja pardimunad 129. 105. Lend 129. 106. Kingitud raha 130. 107. Kaks kaheksa 130. 108. Kahe numbriga 130. 109. Üks 130. 110. Viie üheksa 130. 111. Kümne numbriga 130. 112. Neljal viisil 130. 113. Sada ühega 130. 114. Mõistatuslik jagamine 130. 115. Veel üks jagamine 131. 116. Mida saame? 131. 117. Samas väärtus 131. 118. Lennuk 131. 119. Miljon toodet 131. 120. Teede arv 131. 121. Numbrilaud 132. 122. Kaheksanurk 132. 123. Arvu- 132. 124. Kolmejalgne laud 133. 125. Müntide ümber-tõstmine 133. 126. Mõõda ekvaatorit 134. 127. Kuude ritta 134. 128. Poolkuu 134. 129. Klubi lõige 134. 130. Veel üks lõige 134.	
Nuputamisesannete 101—130 vastused	130